Tentamen: Flervariabelanalys Z2, MVE040, Chalmers, 2005-10-17, M-huset

Skrivtid:	14.00-18.00.
Ansvarig:	Thomas Ericsson, tel 772 10 91, e-post: thomas@math.chalmers.se. Frågor om tentamen kan ställas omkring 15.00 och 17.00.
Resultat:	Anslås Matematiskt Centrum, Eklandag. 86. Jag kommer att sätta upp ett meddelande på www-sidan när jag har rättat klart och när visning äger rum.
Betygsgränser:	10, 15, 20 poäng av maximalt 25.
Lösningsförslag:	På www efter kl. 19.
Hjälpmedel:	Inga, förutom bifogat formelblad.
Observera	att kursutvärderingsblankett medföljer tentamen.

Iakttag följande:
- Skriv tydligt och disponera papperet på ett lämpligt sätt.
- Börja varje ny uppgift på nytt blad.
- Fullständiga lösningar och motiveringar krävs!
- Skriv Ditt personnummer på försättsbladet.
- Sortera Dina lösningar i nummerordning.
- Läs igenom **alla** uppgifterna. De är inte sorterade efter svårighetsgrad.

---

1. Vi har tre positiva tal x, y och z. Talens aritmetiska medelvärde definieras som $M = (x+y+z)/3$. Det harmoniska medelvärdet, H, ges av av $1/H = (1/x + 1/y + 1/z)/3$. Det geometriska medelvärdet är $G = (xyz)^{1/3}$. Vi vill finna x, y och z så att $M = 4$, $G = 2$ och $H = 1$. Ställ upp Newtons metod för detta problem. Du får förenkla varje **enskild** ekvation så att räkningarna blir enklare, men det är **inte tillåtet** att kombinera ekvationer för att förenkla problemet. (3p)

2. Skriv nedanstående problem som ett system av första ordningens ekvationer och formulera sedan Eulers metod för det resulterande systemet. Tag slutligen ett Euler-steg med steglängden $h = 0.1$. (s_1 och s_2 är reellvärda funktioner av tiden t.)
$$\begin{cases} s_1'' = s_1 + 2s_2 - 3(s_1')^2 \\ s_2'' = s_1 - 4s_2 - s_2' + \sin 3t \end{cases}, \quad \begin{cases} s_1(0) = 0, s_1'(0) = -1 \\ s_2(0) = 2, s_2'(0) = -3 \end{cases} \quad \text{(3p)}$$

3. Bestäm tangentplanet till ytan $z = e^{x+2y}$ i den punkt där ytan skär z-axeln. (3p)

4. Avgör om
$$\lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \arctan\left(\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}\right)$$
existerar och beräkna i så fall gränsvärdet. (3p)

5. Låt $f(x, y) = x^3 + xy + y^3$. Beräkna funktionens stationära punkter och avgör vilka som är lokala extrempunkter och dessa punkters karaktär. (3p)

6. Beräkna volymen av kroppen
$$K = \{(x, y, z) \mid x^2 + 2y^2 \le z \le 1\} \quad \text{(3p)}$$

Fortsättning på nästa sida!

---

7. Beräkna

$$\int_\gamma x^2 + xy \; dx + y^2 - x^2 \; dy$$

där γ är den del av parabeln, $x^2 = 2y$, som går från origo till punkten $(2, 2)$. (3p)

8. Bestäm alla lösningar av formen, $f(x, y) = g(xy^2)$, till differentialekvationen:

$$2xf''_{xx} - yf''_{xy} = xy^4$$

Hur ser den lösning ut som satisfierar $f(1, 1) = 0$? (4p)