Gamla Tentamina

Dynamiska system med reglerteknik

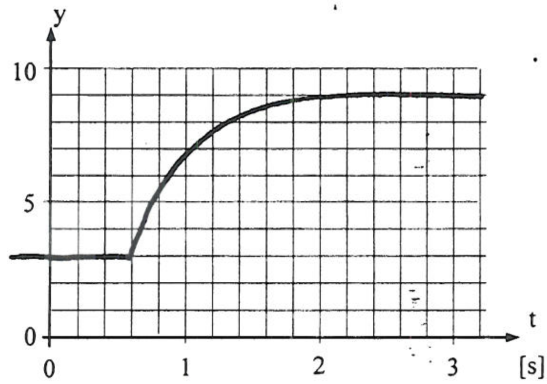
Observera

- Motsvarigheten till uppgift 7 på båda tentor i detta häfte är inte aktuell i år. I stället kommer någon faktafråga/teorifråga på kapitlet om praktiska regulatorer och givare.
- I allmänhet gäller att tentafrågorna har samma karaktär som de frågor vi räknat på övningar och föreläsningar och som finns i övningshäftet. Inga överraskningar alltså!
- Mer information angående tentan kommer på föreläsning.

Uppgift 1

Insignalen till en process ökas stegformat med 0,1 enheter vid tiden t=0.
Utsignalen från processen syns i figuren till höger.

Bestäm en överföringsfunktion för processen. **1p**

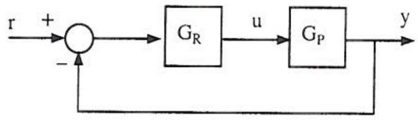


Uppgift 2

Sambandet mellan insignal u och utsignal y för processen Gp i figuren till höger beskrivs av följande differentialekvation:

$$\dot{y} + 10y = 2u$$

Den proportionella regulatorn G_R har överföringsfunktionen $G_R(s)=2$.



Bestäm impulssvaret för hela reglersystemet d v s bestäm utsignalen y(t) då insignalen r är en enhetsimpuls. **2p**

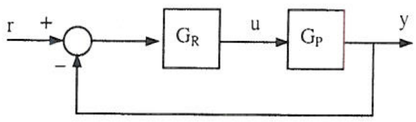
Uppgift 3

En process har följande överföringsfunktion:

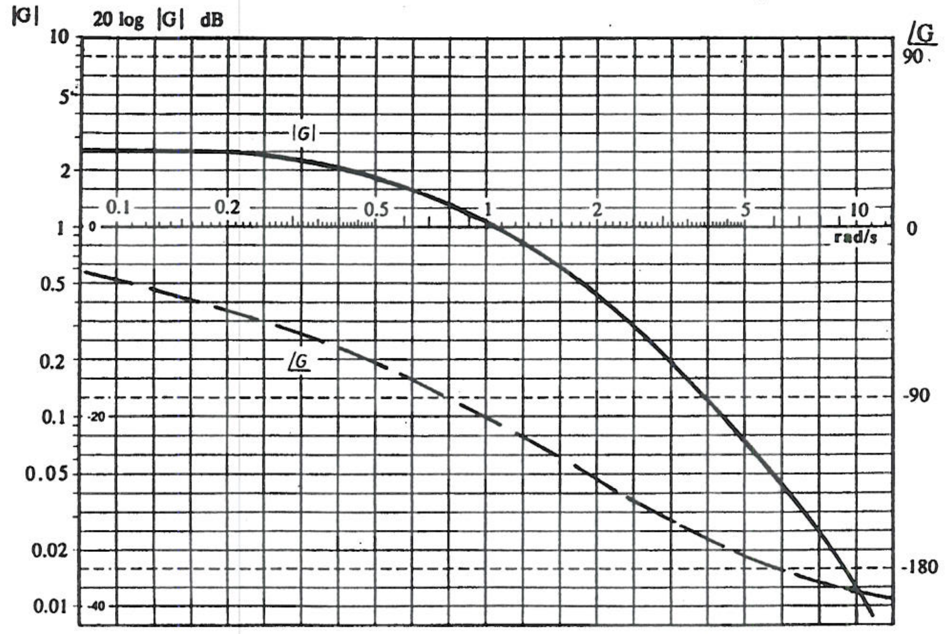
$$G_P(s) = \frac{10 \cdot e^{-0,4s}}{(1+0,5s)}$$

a) Rita ett Bodediagram för processen **2p**

b) Processen kopplas in i ett reglersystem enligt figur till höger. Dimensionera en PID regulator till processen enligt Ziegler-Nichols svängningsmetod. **1p**



Uppgift 4
Bodediagrammet för en process visas i figuren nedan



a) Antag att insignalen till processen ovan är u(t)=3sin(2t)
Bestäm processens utsignal y(t). **1p**

b) Processen ovan kopplas in i ett enhetsåterkopplat reglersystem.
Antag att processen ska regleras med en P-regulator.
Bestäm P-regulatorns förstärkning så att reglersystemet får en fasmarginal på 60°. **0.5p**

c) Hur stor amplitudmarginal får reglersystemet med regulatorvalet i b-uppgiften. **0.5p**

d) Hur stor blir approximativt stigtiden för stegsvaret för det totala reglersystemet med regulatorvalet i b-uppgiften. **0.5p**

e) Hur stort blir det kvarstående felet vid börvärdessteg med regulatorvalet i b-uppgiften. **0.5p**

Uppgift 5
En analog PI-regulator har förstärkningen K=2 och integrationstiden T_I=10 s.

a) Skriv om den analoga överföringsfunktionen till en tidsdiskret överföringsfunktion m h a bilinjär transform. Antag samlingsintervallet 0,4 s.

OBS!! Svaret ska vara på formen en kvot mellan två polynom i z d v s $H(z)=\dfrac{T(z)}{N(z)}$ **1p**

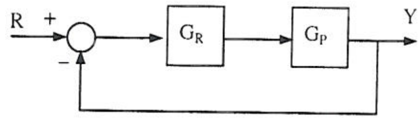
b) Bestäm differensekvationen för regulatorn i b-uppgiften.
Antag insignal e(k) och utsignal u(k) från regulatorn. **1p**

Uppgift 6

I reglersystemet i figuren vill man dimensionera regulatorn G_R så att den totala överföringsfunktionen för systemet blir:

$$G_{TOT}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{(1+3s)}$$

Processens överföringsfunktion är:



$$G_P(s) = \frac{1}{(1+15s)}$$

a) Bestäm $G_R(s)$ så att man erhåller önskad total överföringsfunktion.
   $G_R(s)$ ska skrivas som en kvot mellan två polynom **2p**

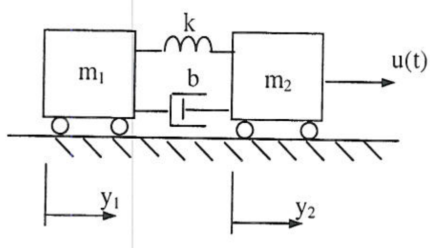
b) Överföringsfunktionen $G_R(s)$ i uppgift a kan åstadkommas med en vanlig PID-regulator. Bestäm vilka regulatorparametrar K, T_I, och T_D denna PID-regulator ska ha. **1p**

Uppgift 7

En process med överföringsfunktionen: $G_P(s) = \dfrac{2{,}5}{(1+10s)}$ skall regleras med en

polplaceringsregulator dimensionerad så att slutna systemets samliga poler ligger i origo.
(S k dead-beat reglering)
Systemet får ej ha något kvarstående fel vid stegformade processtörningar eller vid stegformade börvärdesändringar.
Dimensionera en polplaceringsregulator som uppfyller kraven ovan och som har samplingsintervallet 4 sekunder.
Rita ett blockschema över det beräknade reglersystemet med överföringsfunktioner tydligt utsatta i respektive block. **3p**

Uppgift 8



Härled en linjär tillståndsmodell för "tåget" (lok och en vagn) i figuren ovan. D v s välj tillståndsstorheter och bestäm matriserna "ABCD". Insignalen är lokets dragkraft u(t) och utsignalen är vagnens position y_1. Antag att fjädrarna har sin naturliga längd då $y_1=y_2=0$. **3p**

Dynamiska system m reglerteknik MeI-2 Tentamen 2003-12-19

1. Ur stegsvar $\Delta y = 6$ $(\Delta u = 0{,}1)$ $\Rightarrow k = \frac{\Delta y}{\Delta u} = 60$

$L = 0{,}6$ [s]

$T = 0{,}4$ [s]

$$\therefore \; \underline{\underline{G(s)}} = \frac{k \cdot e^{-Ls}}{1+Ts} = \underline{\underline{\frac{60 \cdot e^{-0{,}6s}}{1+0{,}4s}}}$$

---

2. DE $\dot{y} + 10y = 2u$

$$Y(s)\{s+10\} = 2 \cdot U(s) \Rightarrow G_p(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{2}{s+10}$$

$$G_{tot} = \frac{Y}{R} = \frac{G_R G_P}{1+G_R G_P} = \frac{4}{s+14}$$

Impulssvar: $R(s) = 1$

$$\therefore \; Y(s) = G_{tot}(s) \cdot R(s) = \frac{4}{s+14}$$

$$\underline{\underline{y(t) = 4 \cdot e^{-14t}}} \quad t \geq 0$$

---

3. a) $G_p(j\omega) = \dfrac{10 e^{-j0{,}4\omega}}{1+j0{,}5\omega}$

Brytfrekv $\omega_1 = 2$ ↓

$|G_p|_{LF} = 10$

$\angle G_p = -0{,}4\omega \frac{180°}{\pi} - \arctan 0{,}5\omega$

ω	$\angle G_p$
0,05	-3°
0,1	-5°
0,2	-10°
0,5	-25°
1	-49°
2	-91°
5	-183°

---

b) Ur Bode: $\omega_\pi = 4{,}7$ rad/s $\Rightarrow T_o = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 1{,}34$ [s]

$|G_p(j\omega_\pi)| = 11{,}5$ dB $\Rightarrow k_o = -11{,}5$ dB $\hat{=}$ 0,27

Z-N: Välj
$$\underline{\underline{k_R}} = 0{,}6 k_o = \underline{\underline{0{,}16}}$$
$$\underline{\underline{T_I}} = 0{,}5 T_o = \underline{\underline{0{,}67 \text{ [s]}}}$$
$$\underline{\underline{T_D}} = 0{,}125 T_o = \underline{\underline{0{,}17 \text{ [s]}}}$$

031219

4. a) $u(t) = 3\sin(2t) \Rightarrow \omega = 2$

Ur Bode: $|G(j2)| = -7{,}2\,dB = 0{,}43$

$\angle G(j2) = -133°$

$\therefore \; y(t) = 0{,}43 \cdot 3 \sin(2t - 133°) = \underline{\underline{1{,}29 \sin(2t - 133°)}}$

b) Ur Bode: För $\phi_m = 60°$ krävs $\omega_c = 1{,}5$ rad/s

$|G_p(j1{,}5)| = -4\,dB \Rightarrow$ Välj $\underline{\underline{K_R}} = +4\,dB \hat{=} \underline{\underline{1{,}6}}$

c) Ur Bode: $\omega_\pi = 6$ rad/s

$|G_p(j\omega_\pi)| = -26\,dB$

Med $K_R = +4\,dB$ fås $\underline{\underline{A_m}} = 26 - 4 = 22\,dB \hat{=} \underline{\underline{12{,}6}}$

d) $\underline{\underline{t_r}} \approx \frac{1{,}4}{\omega_c} = \frac{1{,}4}{1{,}5} = \underline{\underline{0{,}93\ [s]}}$

e) Antag enhetssteg

$$e_0 = \lim_{s \to 0} \frac{1}{1 + G_p G_R} = \frac{1}{1 + K_{LF} \cdot K_R}$$

Ur Bode $K_{LF} = 8\,dB \hat{=} 2{,}5$

$$\therefore \; \underline{\underline{e_0}} = \frac{1}{1 + 2{,}5 \cdot 1{,}6} = \underline{\underline{0{,}2}}$$

5. a) $G_R(s) = K\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right) = 2\left(1 + \frac{1}{10s}\right) = \frac{20s + 2}{10s}$ $\qquad h = 0{,}4\ [s]$

Bilinjär transform $s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)} = 5\frac{(z-1)}{z+1} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{H_R(z)}} = \frac{20\,\frac{5(z-1)}{z+1} + 2}{10 \cdot 5\,\frac{(z-1)}{(z+1)}} = \frac{102z - 98}{50z - 50} = \underline{\underline{\frac{2{,}04 - 1{,}96z^{-1}}{1 - z^{-1}}}}$$

b) $\frac{U(z)}{E(z)} = \frac{2{,}04 - 1{,}96z^{-1}}{1 - z^{-1}} \Rightarrow U(z) = z^{-1}U(z) + 2{,}04E(z) - 1{,}96z^{-1}E(z)$

$\therefore \; \underline{\underline{u(k) = u(k-1) + 2{,}04e(k) - 1{,}96e(k-1)}}$

6. a) $G_{TOT} = \dfrac{G_R G_P}{1 + G_R G_P} \Rightarrow G_R = \dfrac{G_{TOT}}{G_P(1 - G_{TOT})} \Rightarrow$

$$\underline{\underline{G_R}} = \frac{1}{G_P\left(\frac{1}{G_{TOT}} - 1\right)} = \frac{1+15s}{(1+3s-1)} = \underline{\underline{\frac{1+15s}{3s}}}$$

b) $G_{PID} = K_R\left(1 + \frac{1}{T_I s} + T_D s\right)$

$$G_R = \frac{1+15s}{3s} = 5 + \frac{1}{3s} = 5\left(1 + \frac{1}{15s}\right)$$

ID $\begin{cases} \underline{\underline{K_R = 5}} \\ \underline{\underline{T_I = 15}} \\ \underline{\underline{T_D = 0}} \end{cases}$

7. $G_P(s) = \dfrac{2,5}{1+10s}$ $h = 4$ [s] Diskretisering $\Rightarrow$

$$H(z) = \frac{2,5\left(1 - e^{-0,4}\right)z^{-1}}{1 - e^{-0,4}z^{-1}} = \frac{0,824 z^{-1}}{1 - 0,670 z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

Inget kvarstående fel vid stegstörning $\Rightarrow$ Integralverkan.

Sätt $A^* = (1 - z^{-1})A(z) = 1 - 1,670 z^{-1} + 0,670 z^{-2}$

$$\left.\begin{aligned} n_c &= n_b - 1 = 0 \\ n_d &= n_{a^*} - 1 = 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\underline{\underline{C(z) = 1}} \\ &D(z) = d_0 + d_1 z^{-1} \end{aligned}$$

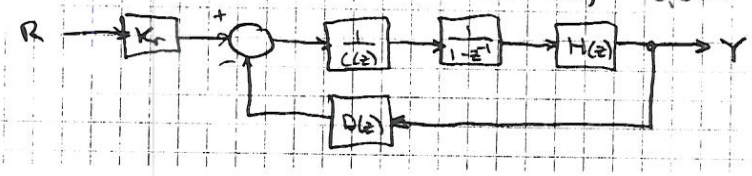
Alla poler i origo $\Rightarrow P(z) = 1$

PPE $1 = (1 - 1,670 z^{-1} + 0,670 z^{-2}) \cdot 1 + 0,824 z^{-1}(d_0 + d_1 z^{-1})$

$1 = 1 + (0,824 d_0 - 1,670) z^{-1} + (0,824 d_1 + 0,670) z^{-2}$

ID $\begin{aligned} z^{-1}&: \; 0,824 d_0 - 1,670 = 0 \\ z^{-2}&: \; 0,824 d_1 + 0,670 = 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{aligned} d_0 &= 2,027 \\ d_1 &= -0,813 \end{aligned} \Rightarrow$

$\underline{\underline{D(z) = 2,027 - 0,813 z^{-1}}}$ $\underline{\underline{K_r}} = \dfrac{P(1)}{B(1)} = \dfrac{1}{0,824} = \underline{\underline{1,214}}$



8. Rörelseekv.

$$\begin{cases} m_1 \ddot{y}_1 = k(y_2 - y_1) + b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \\ m_2 \ddot{y}_2 = u - k(y_2 - y_1) - b(\dot{y}_2 - \dot{y}_1) \end{cases}$$

Ansätt tillstånd

$$\begin{cases} x_1 = y_1 \\ x_2 = \dot{y}_1 \\ x_3 = y_2 \\ x_4 = \dot{y}_2 \end{cases}$$

Tillståndsekv.

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{k}{m_1}(x_3 - x_1) + \frac{b}{m_1}(x_4 - x_2) \\ \dot{x}_3 = x_4 \\ \dot{x}_4 = \frac{1}{m_2} u - \frac{k}{m_2}(x_3 - x_1) - \frac{b}{m_2}(x_4 - x_2) \end{cases}$$

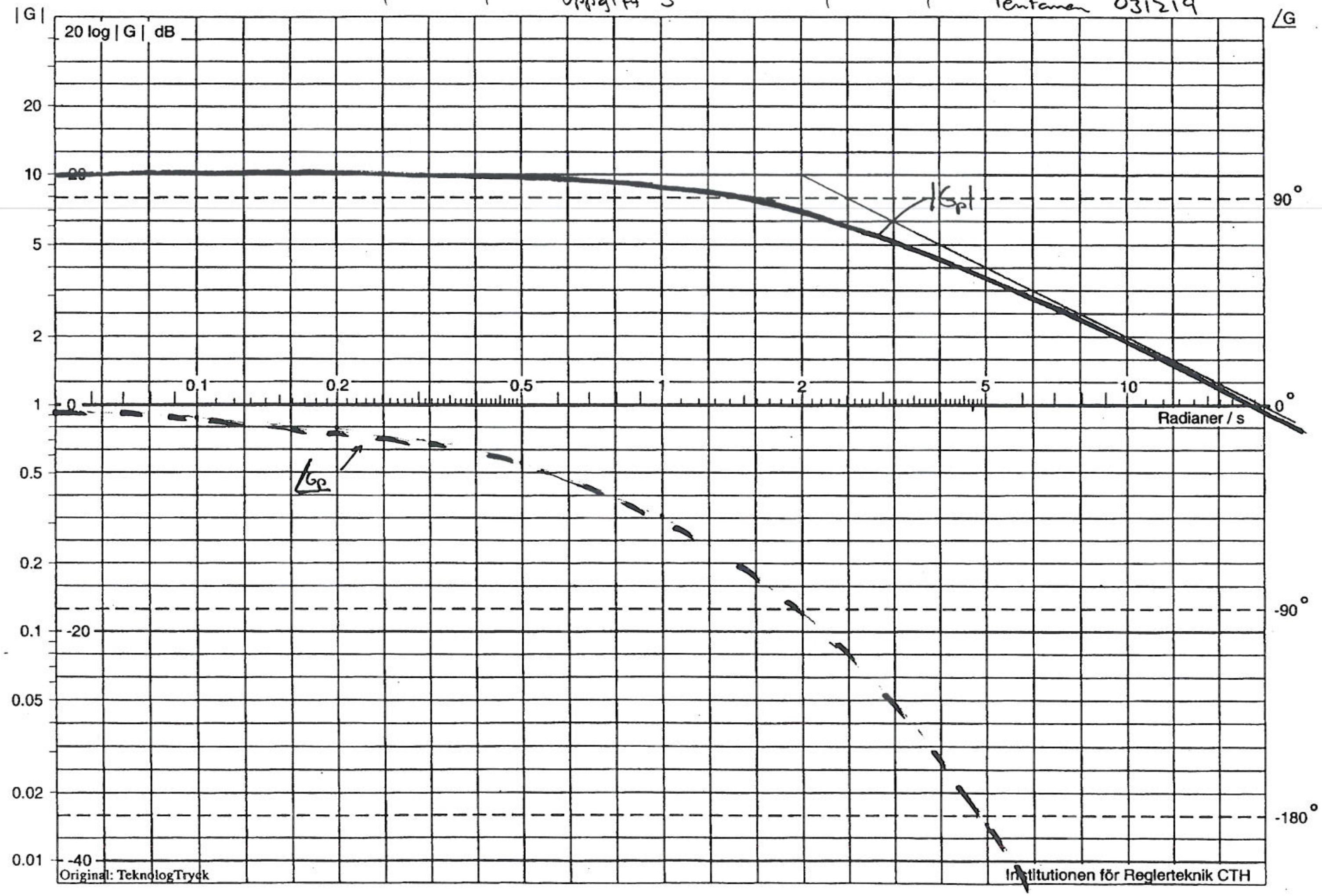
$$y = y_1 = x_1$$

Matrisform

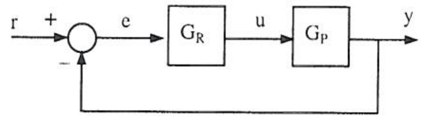
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{k}{m_1} & -\frac{b}{m_1} & \frac{k}{m_1} & \frac{b}{m_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{k}{m_2} & \frac{b}{m_2} & -\frac{k}{m_2} & -\frac{b}{m_2} \end{bmatrix}}^{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \overbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{m_2} \end{bmatrix}}^{B} \cdot u$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \end{bmatrix}}_{D} \cdot u$$

Uppgift 3 Tentamen 031219



Uppgift 1
Sambandet mellan signalerna e, u och y i figuren till höger beskrivs av följande::



$$5\dot{y} + 10y = 2u$$

$$u = 20 \cdot e$$

Bestäm utsignalen y(t) då insignalen r(t) är ett steg med steghöjden 3. **2p**

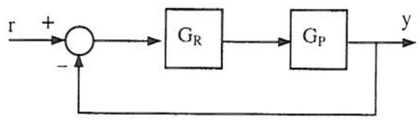
Uppgift 2
En industriell givare har överföringsfunktionen:

$$G(s) = \frac{K}{1+Ts}$$

Då insignalen till givaren ändras stegformat tar det 40 sekunder för utsignalen att nå upp till 80 % av sitt slutvärde. Bestäm analytiskt (ej grafiskt) givarens tidskonstant T. **1p**

Uppgift 3
En process har följande överföringsfunktion:

$$G_P(s) = \frac{20 \cdot e^{-s}}{(1+2{,}5s)^2}$$



a) Rita ett Bodediagram för processen **2p**

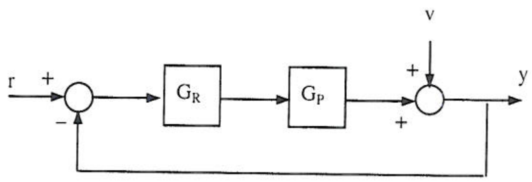
b) Processen kopplas in i ett reglersystem enligt figur till höger. Dimensionera en PI-regulator till processen enligt Ziegler-Nichols svängningsmetod. **1p**

Uppgift 4
a) Snabbhet och stabilitet är två viktiga egenskaper hos ett reglersystem. Hur ändrar sig vanligtvis dessa två egenskaper hos ett reglersystem då man minskar integrationstiden T_I i en PI-regulator **1p**

b) Vad menas med kaskadreglering? Rita ett blockschema och förklara **1p**

Uppgift 5
Reglersystemet i figuren till höger påverkas av en sinusformad störning v med frekvensen 0,2 rad/s och amplituden 8,0 enheter.
I figuren gäller:

v = störsignal
r = referenssignal ("börvärde")
y = utsignal



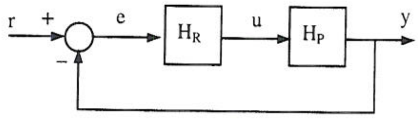
$$G_P(s) = \frac{10}{(1+4s)}$$

$$G_R = 2(1 + \frac{1}{3s})$$

a) Beräkna hur stor amplituden blir hos den sinusformade komponenten i utsignalen y som blir följden av den aktuella störningen? **2p**

b) Hur kan man (åtminstone idealt) helt eliminera störningens inverkan på utsignalen? Rita ett blockschema som visar hur man brukar åstadkomma detta och beräkna överförings-funktioner i införda nya block så att störningens inverkan på utsignalen helt elimineras. **1p**

Uppgift 6
Med hjälp av parametrisk identifiering har man kommit fram till att följande differensekvation beskriver processen H_P i figuren väl:



$$y(k) = 0.8y(k-1) + 2u(k-2)$$

Man önskar reglera processen med en tidsdiskret P-regulator med överföringsfunktionen:

$$H_R(z) = K_R$$

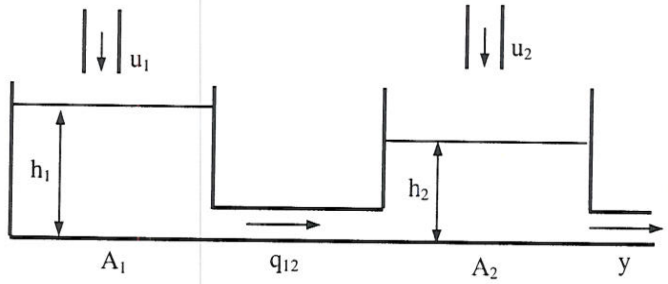
Bestäm hur stor den positiva konstanten K_R maximalt får vara om reglersystemet ska vara stabilt. **3p**

Uppgift 7

En process med överföringsfunktionen: $G_P(s) = \frac{e^{-6s}}{s}$ skall regleras med en tidsdiskret polplaceringsregulator dimensionerad så att det slutna reglersystemet har alla poler i origo. S k dead beat. Dimensionera en polplaceringsregulator som har samplingsintervallet 3 sekunder. Styrsignalen som ska styra processen antas vara konstant mellan samplingstidpunkterna.

Rita ett blockschema över det beräknade reglersystemet med överföringsfunktioner tydligt utsatta i respektive block. **3p**

Uppgift 8



Figuren ovan visar 2 stycken vattentankar sammanbundna med ett rör.
Tankarna har areorna A_1 resp A_2 [m^2] och vattennivåerna är h_1 resp h_2 [m].
De variabla tillflödena är u_1 resp u_2 [m^3/s] och utflödet y [m^3/s] mynnar med ett fritt utlopp från tank 2.
Flödena q_{12} och y antas proportionella mot respektive tryckskillnader över resp rör med proportionalitetskonstant k [m^3/s per meter vattenpelare]

Härled en linjär tillståndsmodell för systemet i figuren ovan. D v s välj tillståndsstorheter och bestäm matriserna "ABCD". Insignaler är inflödena $u_1(t)$ resp $u_2(t)$ och utsignalen är utflödet y. **3p**

Tentamen Dyn. system med reglerteknik MeI-2 2004-08-20

1) $Y(s)\{5s+10\} = 2\cdot U(s) \Rightarrow G_p(s) = \dfrac{2}{5s+10}$

$U(s) = 20\,E(s) \Rightarrow G_R(s) = 20$

$$G_{tot}(s) = \frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{G_R G_p}{1+G_R G_p} = \frac{1}{\frac{1}{G_R G_p}+1} = \frac{1}{\frac{5s+10}{40}+1} = \frac{40}{5s+50} =$$

$$= \frac{8}{s+10}$$

$R(s) = \dfrac{3}{s} \Rightarrow Y(s) = \dfrac{24}{s(s+10)}$

$$\underline{\underline{y(t)}} = \frac{24\left(1-e^{-10t}\right)}{10} = \underline{\underline{2{,}4\left(1-e^{-10t}\right) \quad t \geq 0}}$$

2) $G(s) = \dfrac{Y(s)}{X(s)} = \dfrac{K}{1+Ts}$

$X(s) = \dfrac{1}{s} \Rightarrow Y(s) = \dfrac{K}{s(1+Ts)}$

$y(t) = K\left(1-e^{-\frac{t}{T}}\right) \quad t \geq 0$

Givet $y(40) = K\cdot 0{,}80$

$\therefore \quad 1-e^{-\frac{40}{T}} = 0{,}8 \Rightarrow \underline{\underline{T}} = -\dfrac{40}{\ln 0{,}2} \approx \underline{\underline{24{,}9\ [s]}}$

3a) $G_p(j\omega) = \dfrac{20e^{-j\omega}}{(1+j2{,}5\omega)^2}$

Brytfrekv. $\omega_1 = \dfrac{1}{2{,}5} = 0{,}4 \downarrow\downarrow$

$|G_p|_{LF} = 20$

$\angle G_p = -\omega\dfrac{180^\circ}{\pi} - 2\arctan 2{,}5\omega$

ω	$\angle G_p$
0,05	-17°
0,1	-34°
0,2	-65°
0,5	-131°
1	-194°

b) Ur Bode $\omega_\pi = 0{,}85 \Rightarrow T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_\pi} = 7{,}4\ [s]$

— " — $|G_p(j\omega_\pi)| = 11\,dB \Rightarrow K_0 = -11\,dB = 0{,}28$

Z-N $\Rightarrow$ Välj $\underline{\underline{K_R}} = 0{,}45\,K_0 = \underline{\underline{0{,}13}}$

$\underline{\underline{T_I}} = 0{,}85\,T_0 = \underline{\underline{6{,}3\ [s]}}$

040820

4 a) T_I minskar $\Rightarrow$ Snabbare o instabilare

b) Se lärobok + föreläsningsanteckningar

5 a) $G_{vy} = \dfrac{Y(s)}{V(s)} = \dfrac{1}{1 + G_R G_P}$

$G_P = \dfrac{10}{1+4s}$

$G_R = 2\left(1 + \dfrac{1}{3s}\right) = \dfrac{6s+2}{3s}$

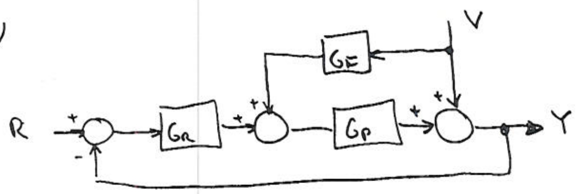
$\therefore \; G_{vy} = \dfrac{1}{1 + \dfrac{6s+2}{3s} \cdot \dfrac{10}{1+4s}} = \dfrac{12s^2 + 3s}{12s^2 + 63s + 20}$

$G_{vy}(j\omega) = \dfrac{-12\omega^2 + j3\omega}{20 - 12\omega^2 + j63\omega}$

$|G_{vy}| = \dfrac{\sqrt{144\omega^4 + 9\omega^2}}{\sqrt{(20-12\omega^2)^2 + (63\omega)^2}} = 0{,}033$ vid $\omega = 0{,}2$ rad/s

$\underline{\underline{\hat{y}}} = |G_{vy}| \cdot \hat{v} = 0{,}033 \cdot 8 = \underline{\underline{0{,}26}}$

b)



Mät störning V o inför framkopplingsblock G_F

Y opåverkad av V om: $V + V \cdot G_F G_P = 0 \Rightarrow \underline{\underline{G_F}} = -\dfrac{1}{G_P} = \underline{\underline{-\dfrac{1+4s}{10}}}$

6) $Y(z)\{1-0{,}8z^{-1}\} = 2z^{-2}U(z)$

$$H_p(z) = \frac{Y}{U} = \frac{2z^{-2}}{1-0{,}8z^{-1}}$$

$$H_R(z) = K_R$$

$$H_{tot}(z) = \frac{Y(z)}{R(z)} = \frac{H_RH_p}{1+H_RH_p}$$

KE $\quad 1 + H_RH_p = 0$

$$1 + \frac{2K_Rz^{-2}}{1-0{,}8z^{-1}} = 0$$

$$1 - 0{,}8z^{-1} + 2K_Rz^{-2} = 0$$

$$z^2 - 0{,}8z + 2K_R = 0$$

Poler $\quad z_{1,2} = 0{,}4 \pm \sqrt{0{,}16 - 2K_R}$

$0 < K_R \leq 0{,}08$: reella poler $\quad \underline{|z_{1,2}| \leq} \; 0{,}4 + 0{,}4 = \underline{0{,}8} \quad \therefore$ stabilt

$K > 0{,}08 \quad$: kompl. poler $\quad z_{1,2} = 0{,}4 \pm j\sqrt{2K_R - 0{,}16}$

$$|z_{1,2}|^2 = 0{,}4^2 + (2K_R - 0{,}16) = 2K_R$$

Stabilt om $|z_{1,2}| < 1 \iff |z_{1,2}|^2 < 1$

$\therefore$ — " — $\quad 2K_R < 1 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{K_R < 0{,}5}}$

---

7) $G_p(s) = \dfrac{e^{-6s}}{s} = \dfrac{(e^{-3s})^2}{s} \qquad h = 3\,[s] \qquad$ Disketisering $\Rightarrow$

$$H(z) = \frac{3z^{-1}}{1-z^{-1}} \cdot z^{-2} = \frac{3z^{-3}}{1-z^{-1}} = \frac{B(z)}{A(z)}$$

$$\begin{cases} n_c = n_b - 1 = 3 - 1 = 2 \\ n_d = n_a - 1 = 1 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C(z) = 1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2} \\ D(z) = d_0 \end{cases}$$

Alla poler i origo $\Rightarrow P(z) = 1$

PPE $\quad P = AC + BD$

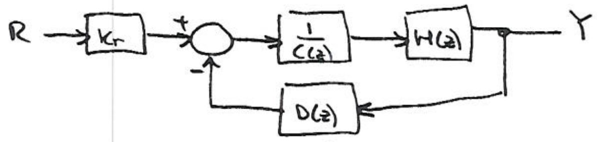
$$1 = (1-z^{-1})(1 + c_1z^{-1} + c_2z^{-2}) + 3z^{-3} \cdot d_0$$

$$1 = 1 + (c_1 - 1)z^{-1} + (c_2 - c_1)z^{-2} + (3d_0 - c_2)z^{-3}$$

7 forts. ID

$$\begin{cases} c_1 - 1 = 0 \\ c_2 - c_1 = 0 \\ 3d_0 - c_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \\ d_0 = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\therefore \quad \underline{\underline{C(z) = 1 + z^{-1} + z^{-2}}} \qquad \underline{\underline{D(z) = \tfrac{1}{3}}} \qquad \underline{\underline{K_r}} = \frac{P(1)}{B(1)} = \underline{\underline{\frac{1}{3}}}$$



8) Materialbalanser

Tank 1 : $A_1 \frac{dh_1}{dt} = u_1 - k(h_1 - h_2) \qquad = -kh_1 + kh_2 + u_1$

Tank 2 : $A_2 \frac{dh_2}{dt} = u_2 + k(h_1 - h_2) - kh_2 = kh_1 - 2kh_2 + u_2$

Tillstånd $x = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$, Insignal $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$, Utsignal $y = kh_2$

$$\therefore \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{k}{A_1} & \frac{k}{A_1} \\ \frac{k}{A_2} & -\frac{2k}{A_2} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2} \end{bmatrix}}_{B} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

$$y = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & k \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

040820 Uppgift 3