

**CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA**  
**Institutionen för signaler och system**  
**Avdelningen för reglerteknik och automation**

**ESS 100 Modellbygge och simulering**  
**Tentamen tisdagen den 16 december 2003**

M 8.45 – 12.45

Lärare: Bo Egardt, tel 3721 eller Fredrik Rosenqvist, tel 5150.

**Tillåtna hjälpmedel:**

Matematisk standardtabell typ Beta.

Physics Handbook.

**Poängberäkning:** Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 50 poäng. Nominella betygsgränser är 20/30/40 poäng. Redovisningen skall vara tydlig och väl motiverad.

**Tentamensresultat:** Anslås senast den 8 januari på anslagstavlan utanför studieexpeditionen. Granskning av rättningen sker den 13 januari kl 12.30 – 13.00.

**OBS!**

Iakttag granskningstiderna! Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste inlämnas **senast två veckor** efter granskningsdagarna.

LYCKA TILL!

## Uppgift 1

(10 p)

(a) Vilket index har systemet

$$\dot{x}_1 = u$$

$$x_2 = x_1$$

(2p)

(b) En modell för ett delsystem görs i Simulink respektive Modelica. Nämn en viktig principiell skillnad mellan de två modellerna. (2p)

(c) Ett elektromekaniskt system har modellerats med stor noggrannhet — såväl snabb som långsam dynamik har inkluderats i modellen. Vilka problem riskerar man att råka ut för? (2p)

(d) En OE-modell anpassas till experimentella data. Vid valideringen kan man konstatera att korskovariansen mellan residual och insignal är liten, men att kovariansen för residualen ( $\hat{R}_e(\tau)$ ) har stora värden för flera värden på  $\tau$ . Hur påverkar syftet med modelleringen det fortsatta modelleringsarbetet? (2p)

(e) Vilket delsystem (vilken komponent) beskriver Modelica-koden nedan? (eng. *flange* ung. *fläns*) (2p)

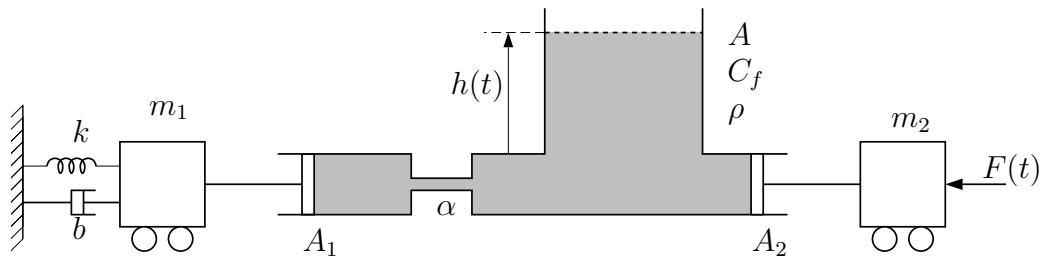
```
model Component
  "Mechanical translational component"
  extends Interfaces.Compliant;
  parameter SI.Position s_rel0=0 "unstretched spring length";
  parameter Real c = 1 "spring constant";
  parameter Real d = 1 "damping constant";
  SI.Velocity v_rel "relative velocity between flange L and R";
equation
  v_rel = der(s_rel);
  f = c*(s_rel - s_rel0) + d*v_rel;
end Component;
---
```

```
partial model Compliant
  "Compliant connection of two translational 1D flanges"
  Flange_a flange_a
    "(left) driving flange (flange axis directed INTO cut plane)"
  Flange_b flange_b
    "(right) driven flange (flange axis directed OUT OF cut plane)";
  SI.Distance s_rel "relative distance (= flange_b.s - flange_a.s)";
  flow SI.Force f
    "force between flanges (positive in direction of flange axis R)";
equation
  s_rel = flange_b.s - flange_a.s;
  flange_b.f = f;
  flange_a.f = -f;
end Compliant;
```

## Uppgift 2

(10 p)

Betrakta nivåregleringssystemet i figuren nedan. Syftet är att med hjälp av kraften  $F(t)$  reglera nivån i tanken.



$$F(t) = \text{kraften på massan } m_2 [N] \quad (1)$$

$$m_1, m_2 = \text{massa } [kg] \quad (2)$$

$$k = \text{fjäderkonstant } [N/m] \quad (3)$$

$$b = \text{viskös friktion } [Nm] \quad (4)$$

$$A, A_1, A_2 = \text{areor hos tanken samt hos rören } [m] \quad (5)$$

$$\rho = \text{vätskans densitet } [kg/m^3] \quad (6)$$

$$C_f = \text{flödeskapacitans } [m^4 s^2 / kg] \quad (7)$$

$$(8)$$

Energiförlusten i röret p.g.a friktion kan beskrivas som

$$p_s(t) = \alpha Q_s(t)$$

där

$$p_s(t) = \text{tryckskillnaden mellan rörets ändar } [N/m^2]$$

$$Q_s(t) = \text{flödet genom röret } [m^3/s]$$

(a) Rita bindningsgraf för nivåregleringssystemet och markera kausalitet. (5p)

(b) Ange insignaler, utsignaler och ett möjligt val av tillståndsvariabler om nivåregleringssystemet ska beskrivas på tillståndsform. (2p)

(c) Skriv nivåregleringssystemet på tillståndsform. (3p)

### Uppgift 3

(10 p)

Man vill identifiera parametrarna  $b_1$  och  $b_2$  i modellen

$$y(t) = b_1 u(t-1) + b_2 u(t-2) + e(t)$$

där  $e$  är vitt brus med varians  $\lambda$ .

(a) Låt  $u$  vara vitt brus med variansen  $\mu$ , oberoende av  $e$ . Visa att varianserna hos skattningarna av  $b_1$  och  $b_2$  är proportionella mot brus/signalförhållandet  $\lambda/\mu$ . (3p)

(b) Antag att den noggrannhet vi kan få i (a) är begränsad av att variansen för  $u$  måste uppfylla  $\mu \leq \mu_0$ . Kan vi få bättre resultat genom att använda färgat brus för  $u$  i stället för vitt brus? Inskränk undersökningen till skattningen av  $b_1$ . (3p)

(c) Anta att vi inte har några begränsningar på kovariansfunktionen för  $u$ , men att experimentet måste göras så att variansen för  $y$  är mindre än  $2\lambda$ . Visa att problemet att minimera variansen hos skattningen av  $b_1$  är av formen

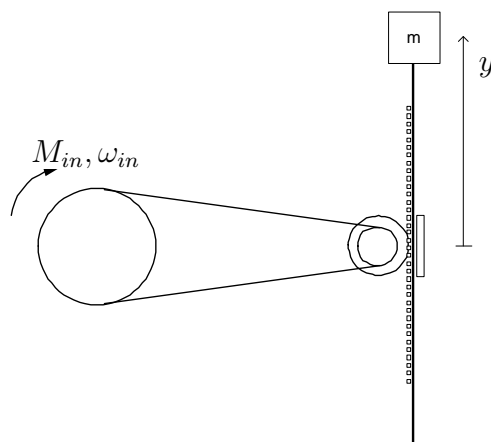
$$\min f(x), \quad \text{under bivillkor } g(x) \leq 0$$

Vilka blir variablerna  $x$  och funktionerna  $f$  och  $g$ ? Varför är detta resultat svårt att använda vid praktisk identifiering? (4p)

#### Uppgift 4

(10 p)

Systemet enligt figur består av en motordriven remskiva (den större till vänster), som via en remtransmission driver den mindre skivan, på vilken ett kugghjul är fast monterat. Rotationsrörelsen överförs via en kuggstång till en vertikal rörelse. Anordningen används för att förflytta en last i vertikalled (positionen för denna är  $y$ ).



Antag att den större skivans tröghetsmoment  $J_1$  och radie  $r_1$  är kända. Även den mindre skivans radie  $r_2$  är känd, medan dess tröghetsmoment  $J_2$  antas försumbart ( $J_2 \approx 0$ ). Kugghjulets radie  $\rho > r_2$  är också känd, liksom den totala massan  $m$  för kuggstång och last.

Friktion påverkar den större skivan (friktionskoefficient  $b_1$ ), den mindre skivan ( $b_2$ ) samt kuggstången ( $b_3$ ). Samtliga dessa parametrar, liksom remmens fjäderkonstant  $k$ , är okända.

- Ta fram en tillståndsmodell från lämplig insignal ( $M_{in}$  eller  $\omega_{in}$ ) till massans position ( $y$ ). (5p)
- Vilka ev. förändringar av din modell behöver göras om  $J_2$  inte längre försummas (dvs  $J_2 \neq 0$ )? (2p)
- Avgör med hjälp av tillståndsmodellen i a) i vad mån de okända parametrarna  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$  och  $k$  kan bestämmas med hjälp av experimentella data (in- och utsignaler från systemet). Motivera! (3p)

## Uppgift 5

(10 p)

Man vill förbättra kurshållningsregulatorn (den s.k. autopiloten) på fartyget *Stena Germanica*, och som förberedelse för detta skall en dynamisk modell, som beskriver hur roderutslag ( $\delta$ ) påverkar fartygets kurs ( $\psi$ ), tas fram med hjälp av registreringar av dessa variabler under drift.

(a) För att få ledning i systemidentifieringsarbetet, kan man ta hjälp av insikter i hur fysiken fungerar i det aktuella fallet. Om vi antar att en modell av låg ordning räcker för att beskriva den dominerande dynamiken, så är följande överföringsfunktioner från  $\delta$  till  $\psi$  några kandidater:

$$G_1(s) = \frac{K}{s(s+a)} \quad G_2(s) = \frac{K}{s+a} \quad G_3(s) = \frac{K}{s^2 + 2\zeta\omega s + \omega_0^2}$$

Vilken av dessa är den mest rimliga ur fysikalisk synvinkel? Motivera ordentligt ditt val! (3p)

(b) Anta att roderutslaget är styckvis konstant (datorstyrt). Föreslå med ledning av valet i a) en tidsdiskret modellstruktur av black-box typ, som lämpar sig för att skatta en modell som kan beskriva sambandet mellan  $\delta$  och  $\psi$ . (2p)

(c) Störningar i form av vågor påverkar fartygets kurs. Dessa störningar har följande egenskaper:

- De ger liksom roderutslaget ett vridande moment på fartyget.
- De har starka inslag av periodiska signaler.

Hur kan modellstrukturen i b) utvidgas för att inkludera modellering av störningarna? Motivera! (3p)

(d) Hur ser prediktorn för den valda modellstrukturen i c) ut? Vilka villkor måste modellparametrarna uppfylla för att prediktorn skall vara stabil? (2p)

# Grundläggande fysikaliska samband

	Intensitet	Flöde	Momentana samband	Intensiteter (Lagring)	Flöden (Lagring)
Beteckning	$e(t)$	$f(t)$	$R : \gamma$	$I : \alpha$	$C : \beta$
Ellära	Spänning $u(t)$ [V]	Ström $i(t)$ [A]	Resistans $R$ [ $\Omega$ ]	Induktans $L$ [H]	Kapacitans $C$ [F]
Mekanik translation	Kraft $F(t)$ [N]	Hastighet $v(t)$ [m/s]	Friktion $\mu$ [Ns/m]	Massa $m$ [kg]	Fjäderkonst. $1/k$ [m/N]
Mekanik rotation	Moment $M(t)$ [Nm]	Vinkelhast. $\omega(t)$ [rad/s]	Friktion $\mu$ [Nms/rad]	Tröghetsm. $J$ [Nms <sup>2</sup> ]	Vridstyvhet $1/k$ [rad/Nm]
Flöden	Tryck $p(t)$ [N/m <sup>2</sup> ]	Flöde $Q(t)$ [m <sup>3</sup> /s]	Flödesres. $R_f$ [Ns/m <sup>2</sup> ]	Inertans (rör) $L_f$ [kg/m <sup>2</sup> ]	Flödeskap. $C_f$ [m <sup>2</sup> /kg]
Termiska system	Pseudo-bindningsgrafer				

## Linjära system

Momentana samband (R):  $e(t) = \gamma f(t)$

Intensitetssupplagring (I):  $f(t) = \frac{1}{\alpha} \int e(\tau) d\tau$

Flödesupplagring (C):  $e(t) = \frac{1}{\beta} \int f(\tau) d\tau$

Idén med bindningsgrafer: Energibalans (effekt),  $P(t) = e(t) \cdot f(t)$  [J/s].



1

# Bindningsgrafelement (1)

**Bindning:**  $\frac{e(t)}{f(t)}$  Halvpilen ger riktningen på energiflödet.

**Intensitetskällor:**  $S_e \frac{e(t)}{f(t)}$  System In- och utsignaler.

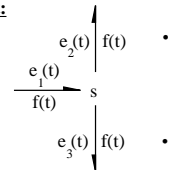
**Flödeskällor:**  $S_f \frac{e(t)}{f(t)}$  System In- och utsignaler.

**Resistiva element:**  $\frac{e(t)}{f(t)}$  R :  $\gamma$

**Intensitetssupplagring:**  $\frac{e(t)}{f(t)}$  I :  $\alpha$

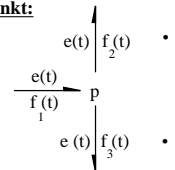
**Flödesupplagring:**  $\frac{e(t)}{f(t)}$  C :  $\beta$

## Seriellknutpunkt:



- Samma flöde.
- Intensitetssumman noll:  $e_1(t) - e_2(t) - \dots - e_n(t) = 0$

## Parallellknutpunkt:



- Flödessumman noll:  $f_1(t) - f_2(t) - \dots - f_n(t) = 0$
- Samma intensitet.

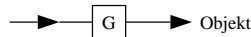
2

# Bindningsgrafelement (2)

**Transformator:**  $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$  TF  $\frac{e_2(t)}{f_2(t)}$   $e_2(t) = n e_1(t)$   
 $f_2(t) = n^{-1} f_1(t)$

**Gyrator:**  $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$  GY  $\frac{e_2(t)}{f_2(t)}$   $e_2(t) = r f_1(t)$   
 $f_2(t) = r^{-1} e_1(t)$

## Styrda element:



Halvpilen markerar signalflöde utan energitransport. G kan vara ett dynamiskt system.

Objekt: R-element, källor transformatorer och gyratorer.

3

# Kausalitet - orsak och verkan

**Intensitetskällor:**  $S_e \frac{e(t)}{f(t)}$   $e(t)$  är insignal,  $f(t)$  genereras.

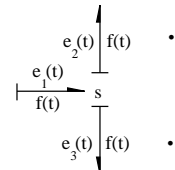
**Flödeskällor:**  $S_f \frac{e(t)}{f(t)}$   $f(t)$  är insignal,  $e(t)$  genereras.

**Resistiva element:**  $\frac{e(t)}{f(t)}$  R :  $\gamma$  eller  $\frac{e(t)}{f(t)}$  R :  $\gamma$

**Intensitetssupplagring:**  $\frac{e(t)}{f(t)}$  I :  $\alpha$   $f(t) = \frac{1}{\alpha} \int e(\tau) d\tau$   $\frac{d f(t)}{dt} = \frac{e(t)}{\alpha}$

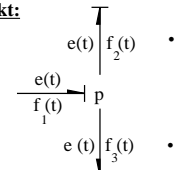
**Flödesupplagring:**  $\frac{e(t)}{f(t)}$  C :  $\beta$   $e(t) = \frac{1}{\beta} \int f(\tau) d\tau$   $\frac{d e(t)}{dt} = \frac{f(t)}{\beta}$

## Seriellknutpunkt:



Alla bindningar utom en ska ha kausalitetsmarkering vid s:et.

## Parallellknutpunkt:



Precis en bindning ska ha kausalitetsmarkering vid p:et.

**Transformator:**  $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$  TF  $\frac{e_2(t)}{f_2(t)}$  eller  $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$  TF  $\frac{e_2(t)}{f_2(t)}$

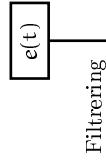
**Gyrator:**  $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$  GY  $\frac{e_2(t)}{f_2(t)}$  eller  $\frac{e_1(t)}{f_1(t)}$  GY  $\frac{e_2(t)}{f_2(t)}$

4

# Stokastiska störningar

Antag att  $\{e(t)\}$  är vitt brus med  $E e(t) = m_e = 0$  och med  $R_e(\tau) = \delta_0(\tau)R$ .

## Tidsplanet:



$w(t)$ : stationär stokastisk process med medelvärde 0.

Spektrafaktorisering

$$\Phi_w(\omega) = |H(e^{i\omega})|^2 \Phi_e(\omega)$$

Kovariansfunktion  $E w(t)w(t + \tau)$

$$\Phi_w(\omega) = T \cdot \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_w(\tau) e^{-i\tau\omega}$$

Fouriertransform

$$R_w(\tau)$$

$$R_w(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_w(\omega) e^{i\tau\omega} d\omega$$

Korskovariansfunktion.  $(h(\tau)$  är impuls-svarefficient)

$$\Phi_{we}(\omega) = H(e^{i\omega}) \Phi_e(\omega)$$

Korspektrum

$$\text{Var} w(t) = R_w(0)$$

$$R_w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_w(\omega) d\omega$$

$$\text{Var} w(t)$$

$$R_w(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/T}^{\pi/T} \Phi_w(\omega) d\omega$$

## Frekvensplanet:

Spektralitet  $\Phi_e(\omega)$  Vitt brus:  $\Phi_e(\omega) = T \cdot R$

Filtrering

Om  $v(t)$  är en **stokastisk variabel** så är följden  $\{v(t), t = 0, 1, \dots\}$  en **stokastisk process**. Om störningens karaktär är tidsinvariant är den stokastiska processen **stationär**.

En speciell uppmätt följd av  $\{v(t)\}$  kallas en **realisering** av den stokastiska processen.

**Kovariansfunktionen** uttrycker den inbördes kopplingen mellan  $v(t)$  och  $v(t + \tau)$ . Om  $\tau = 0$  fås variansen.

**Korskovariansfunktionen** uttrycker kopplingen mellan två olika stokastiska processer  $v(t)$  och  $w(s)$ .

**Spektralitet** är ett mått på medelfrekvensinnehållet i en stokastisk signal. Kallas ibland effektspektrum.

**Korspektrum** anger medelfrekvensinnehållet mellan två stokastiska processer.