CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE 103 Reglerteknik D
Tentamen 2019-01-18

14.00 - 18.00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Chalmers-godkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng.
Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 1 februari kl 12-13 i rum 5407 i EDIT-byggnaden. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Beräkna fasförskjutningen för mycket höga frekvenser ($\omega \to \infty$) för systemet med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{s+1}{s^2+4s+5}$$

(2 p)

b. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+1)^2}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K$. Vilken är högsta tillåtna förstärkning K, om det slutna systemet skall vara stabilt med en amplitudmarginal på minst 2,5? (2 p)

c. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

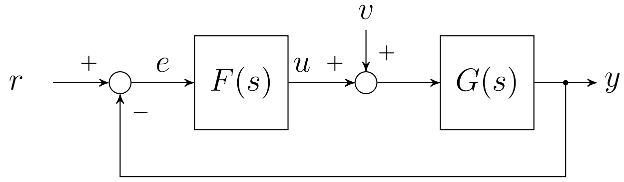
$$\dot{y}(t) + \sin y(t) = \cos u(t)$$

Linjärisera differentialekvationen kring den stationära lösning som ges av $u = y = \pi/4$ och bestäm det linjäriserade systemets överföringsfunktion från insignal till utsignal. (2 p)

d. En process med överföringsfunktionen

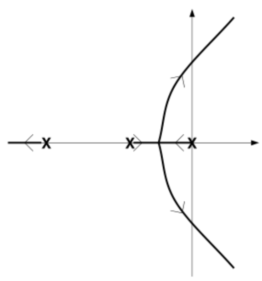
$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K = 2$ enligt nedan.

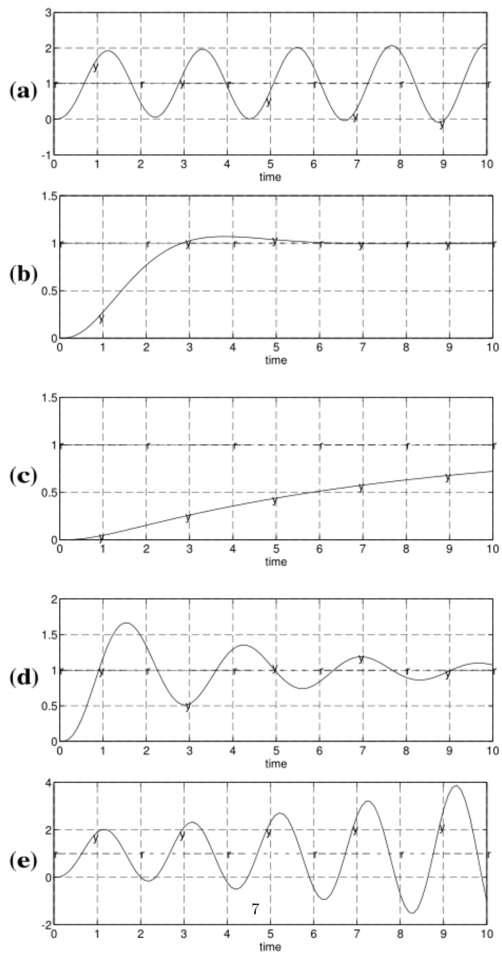


Vad blir störningen v:s stationära bidrag till utsignalen y, då v är en stegstörning med amplituden 10? (2 p)

e. Ett system återkopplas med en P-regulator med förstärkningen K. Det slutna systemets poler varierar med ökande värden på K enligt figur:



Stegsvaret för det slutna systemet har registrerats för fem olika värden på K (1, 6, 30, 50 och 60), och resultaten visas nedan. Para ihop respektive stegsvar med rätt K-värde och motivera dina val! (2 p)



Lösning:

a. *Gör först liknämnigt för att få $G(s)$ som en rationell funktion:*

$$G(s) = \frac{1}{s+3} - \frac{s+1}{s^2+4s+5} = \frac{2}{(s+3)(s^2+4s+5)}$$

För höga frekvenser uppför sig denna som $2/s^3$ med fasförskjutningen $-3 \cdot 90° = -270°$.

b. *Systemets kretsöverföring blir $L(s) = \frac{K}{s(s+1)^2}$, och Nyquists förenklade kriterium kan alltså användas. $L(s)$ har fasen $-180°$ för $\omega = \omega_\pi = 1$. Kravet på amplitudmarginal ger villkoret $K|G(i\omega_\pi)| \leq 1/2.5$, och eftersom $|G(i\omega_\pi)| = 1/2$, måste K uppfylla $K \leq 0.8$.*

c. *Linjärisering ger*

$$\Delta\dot{y}(t) + \cos\pi/4 \cdot \Delta y(t) = -\sin\pi/4 \cdot \Delta u(t)$$

vilket efter Laplace-transformering ger överföringsfunktionen

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{1/\sqrt{2}}{s+1/\sqrt{2}}$$

d. *Slutvärdessatsen kan användas, eftersom det slutna systemet är stabilt (karakteristiska polynomet $s^2 + (K+1)s + 2K + 1$ har positiva koefficienter):*

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{G(s)}{1+F(s)G(s)} \cdot \frac{10}{s} = \frac{2}{1+2\cdot 2} \cdot 10 = 4$$

e. *För $K = 0$ har systemet två poler i VHP och en i origo. Då K ökar blir systemet mer oscillativt, för att till sist bli instabilt. Stegsvaren i (a) och (e) är instabila, (e) mer än (a) (stegsvaret växer snabbare), dvs K är större i (e) än i (a). Alltså gäller (a): $K = 50$, (e): $K = 60$.*
Övriga fall är stabila, och (c) svarar mot en långsam pol nära origo, dvs fallet $K = 1$.
De båda kvarvarande stegsvaren är båda oscillativa, men (d) har mindre dämpning än (b), vilket svarar mot poler närmare imaginäraxeln. Alltså: (b): $K = 6$, (d): $K = 30$.
(a): K = 50, (b): K = 6, (c): K = 1, (d): K = 30, (e): K = 60

Uppgift 2.
Ett system beskrivs av differentialekvationerna

$$\begin{aligned}\dot{x}_1(t) &= x_2(t)\\ \dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u(t),\end{aligned}$$

där som vanligt $u(t)$ är styrsignalen, och utsignalen ges av $y(t) = x_1(t)$. Systemet skall regleras med tillståndsåterkoppling enligt

$$u(t) = -Lx(t) + K_r r(t),$$

där $x(t) = [x_1(t)\ x_2(t)]^T$ och $r(t)$ är en referenssignal.

a. Visa att alla återkopplingsvektorer L med positiva element ger ett stabilt slutet system. (2 p)

b. Anta att man vill att det slutna systemets dynamik skall bestämmas av den relativa dämpningen ζ och den naturliga (odämpade) egenfrekvensen ω_n. Beräkna L som funktion av ζ och ω_n. (1 p)

c. Man vill nu begränsa förstärkningen i återkopplingen enligt (b), så att både l_1 och l_2 har högst beloppet 1. För ett fixt värde på ζ, hur bör man då välja ω_n för att få ett så snabbt system som möjligt? (2 p)

Lösning:

a. *Med vektor/matris-notation är tillståndsmodellen*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix} u(t) = Ax(t) + Bu(t)\\ y(t) &= \begin{bmatrix}1 & 0\end{bmatrix} x(t) = Cx(t)\end{aligned}$$

Med tillståndsåterkoppling ges systemmatrisen får det återkopplade systemet av

$$A - BL = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & -1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}l_1 & l_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ -l_1 & -1-l_2\end{bmatrix}$$

vilket ger det karakteristiska polynomet

$$\det(sI - (A - BL)) = s(s + 1 + l_2) + l_1 = s^2 + (1 + l_2)s + l_1$$

För stabilitet krävs att koefficienterna i det karakteristiska polynomet är positiva, vilket är uppfyllt för $l_1 > 0$ och $l_2 > -1$, och därmed för alla positiva l_1, l_2.

b. *Identifiering av koefficienter för den karakteristiska ekvationen*

$$s^2 + (1 + l_2)s + l_1 = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2$$

ger $l_1 = \omega_n^2$ *och* $l_2 = 2\zeta\omega_n - 1$.

c. *Ett större* ω_n *ger ett snabbare system, så* ω_n *bör väljas så stort som möjligt med tanke på begränsningarna på* l_1 *och* l_2. *Villkoret på* l_1 *ger direkt* $\omega_n \leq 1$, *och valet* $\omega_n = 1$ *uppfyller även* $|l_2| \leq 1$ *för* $0 \leq \zeta \leq 1$.

Uppgift 3.
Följande överföringsfunktioner beskriver två varianter av en PD-regulator:

$$F_1(s) = K_p(1 + T_d s) \qquad F_2(s) = K_p\big(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\big)$$

a. Skissa amplitud- och faskurvor i Bodediagram för de två varianterna. OBS! *Skisser* räcker – det duger t ex med endast asymptoter för amplitudkurvan – men det är viktigt att ange ev. brytfrekvenser, liksom värden för amplitud och fas då $\omega \to 0$ eller $\omega \to \infty$. (2 p)

b. Vilken är den främsta anledningen till att man föredrar variant 2 för praktisk implementering? (1 p)

c. Bestäm en differensekvation, som kan användas som en datoralgoritm för att implementera variant 2 av PD-regulatorn med samplingsintervallet h. (2 p)

Lösning:

a. *Variant 1: Amplituddelen har lutning 0 för små* ω *(förstärkning* K_p*) och bryter uppåt vid* $\omega = 1/T_d$. *Fasdelen börjar vid* 0° *för små* ω *och ökar till* 90° *för stora* ω.
Variant 2: Amplituddelen börjar som ovan, bryter uppåt vid $\omega = 1/(T_d + T_f)$ *samt nedåt vid* $\omega = 1/T_f$. *Asymptotiskt är förstärkningen* K_p *för små* ω *och* $K_p(1 + T_d/T_f)$ *för stora* ω. *Fasdelen börjar vid* 0° *för små* ω, *når ett max mellan brytfrekvenserna och planar ut vid* 0° *för stora* ω.

b. *Variant 1 ger godtyckligt hög förstärkning för höga frekvenser, vilket är olämpligt, eftersom brus ger upphov till stora styrsignaler.*

c. PD-regulatorn ges av (u är styrsignal och e är reglerfel)

$$U(s) = K_p\big(1 + \frac{T_d s}{1 + T_f s}\big)E(s) \quad \Leftrightarrow$$
$$(1 + T_f s)U(s) = K_p\big(1 + (T_f + T_d)s\big)E(s)$$

Använd t ex "Euler bakåt" för att diskretisera:

$$\big(1 + T_f\frac{1 - q^{-1}}{h}\big)u(k) = K_p\big(1 + (T_f + T_d)\frac{1 - q^{-1}}{h}\big)e(k) \quad \Leftrightarrow$$
$$(1 + \frac{T_f}{h})u(k) = \frac{T_f}{h}u(k-1) + K_p(1 + \frac{T_f + T_d}{h})e(k) - K_p\frac{T_f + T_d}{h}e(k-1)$$

Med $\alpha = T_f/h$ *och* $\beta = (T_f + T_d)/h$, *så kan alltså algoritmen beskrivas som*

$$u(k) = \frac{\alpha}{1+\alpha}u(k-1) + K_p\frac{1+\beta}{1+\alpha}e(k) - K_p\frac{\beta}{1+\alpha}e(k-1)$$

Uppgift 4.
En enkel vattentank (med ett inflöde som styrs via en pump och ett utflöde genom en fix ventil) beskrivs av en olinjär differentialekvation. Man kan dock linjärisera den olinjära modellen kring en stationär arbetspunkt, vilket leder till en linjär modell

$$Y(s) = \frac{1}{s+\alpha}U(s) \tag{1}$$

där $U(s)$ och $Y(s)$ betecknar avvikelsen i insignal (flöde) respektive utsignal (nivå) från den stationära punkten. Parametern α beror bl a på valet av arbetspunkt.

a. Antag att den linjära modellen (1) styrs med PI-återkopplingen

$$U(s) = (K_p + K_i \frac{1}{s})(R(s) - Y(s)).$$

Ange det återkopplade systemets karakteristiska ekvation. (1 p)

b. Anta att $\alpha = 0.03$ för en arbetspunkt, som svarar mot en låg nivå i tanken. Bestäm koefficienterna K_p och K_i, så att det återkopplade systemets poler placeras i -0.04. (2 p)

c. Antag att återkopplingen som beräknades i (b) används vid en annan arbetspunkt med en hög nivå i tanken, motsvarande $\alpha = 0.01$. Var hamnar det återkopplade systemets poler? Gör även en uppskattning av vilken översläng stegsvaret får vid den höga nivån.

(2 p)

Lösning:

a. Det återkopplade systemets överföringsfunktion blir med sedvanliga beteckningar

$$G_c(s) = \frac{F(s)G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{K_p s + K_i}{s(s+\alpha) + K_p s + K_i}$$

dvs den karakteristiska ekvationen är $s^2 + (K_p + \alpha)s + K_i = 0$.

b. Med $\alpha = 0.03$ *och den sökta polplaceringen får vi designekvationen*

$$s^2 + (K_p + 0.03)s + K_i = (s + 0.04)^2 = s^2 + 0.08s + 0.0016$$

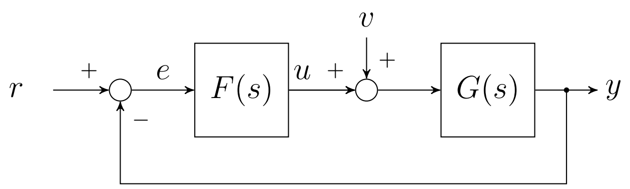
vilket ger $K_p = 0.05$ *och* $K_i = 0.0016$.

c. *Med de valda regulatorparametrarna fås med* $\alpha = 0.01$ *det karakteristiska polynomet*

$$s^2 + (K_p + \alpha)s + K_i = s^2 + 0.06s + 0.0016 = s^2 + 2 \cdot \frac{3}{4} \cdot 0.04 + (0.04)^2$$

Polerna blir alltså nu komplexa, $s \approx -0.03 \pm 0.0265i$, *och av det sista uttrycket framgår att den relativa dämpningen blir* $\zeta = \frac{3}{4}$. *Av formelbladet framgår att överslängen ges av uttrycket* $M = e^{-\pi\zeta/\sqrt{1-\zeta^2}} \approx 0.03 = 3\%$.

Uppgift 5.
En regulator $F(s)$ skall dimensioneras för reglersystemet enligt figur.



Följande designkrav skall uppfyllas:

1. Inga kvarstående fel för stegformade störningar v.
2. Fasmarginalen skall vara minst 45°.
3. Skärfrekvensen skall vara minst 2 rad/s.

Processens överföringsfunktion ges av

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

a. På grund av det första kravet, så är det nödvändigt att ha integrerande verkan i regulatorn. Välj en lämplig integrationstidskonstant T_i, så att kretsöverföringens fas inte påverkas för mycket vid önskad skärfrekvens. (1 p)

b. Fullborda regulatordimensioneringen, så att alla designkrav är uppfyllda. (4 p)

Lösning:

a. *Integrerande verkan fås genom att använda en PI-regulator med överföringsfunktionen* $K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$. *Tidskonstanten* T_i *avgör brytfrekvensen, och denna skall vara tillräckligt liten i förhållande till skärfrekvensen för att fasen inte skall påverkas för mycket. Ett val är* $1/T_i \approx \omega_c/10$, *dvs här* $T_i \approx 5$, *som ger ungefär* 6° *fasförlust vid* ω_c. *Valet av* K_p *är här oväsentligt och görs i uppgift (b).*

b. *Eftersom* $\arg G(i\omega_c) \approx -190°$, *så behöver fasen lyftas ungefär* $\varphi_{max} = 55° + 6° = 61°$. *Använd en leadlänk (PD-regulator)* $K_p \frac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b}$ *med* $b = (1+\sin\varphi_{max})/(1-\sin\varphi_{max}) \approx 15$ *och* $1/\tau_d = \omega_c/\sqrt{b} \approx 0.52$, *vilket ger* $b/\tau_d \approx 7.7$. *Regulatorn blir då*

$$F(s) = K_p \frac{1+sT_i}{T_i s} \cdot \frac{1+s\tau_d}{1+s\tau_d/b} = K \frac{1+\frac{s}{0.2}}{s} \cdot \frac{1+\frac{s}{0.52}}{1+\frac{s}{7.7}}$$

Slutligen ger amplitudvillkoret $|G(i\omega_c)F(i\omega_c)| = 1$ *förstärkningen* $K \approx 0.58$

SLUT!