CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för elektroteknik
System- och reglerteknik

ERE 103 Reglerteknik D
Tentamen 2018-08-23

08.30 - 12.30

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

Tillåtna hjälpmedel:

- Typgodkänd räknare
- Mathematics Handbook (Beta)
- Physics Handbook
- Formelsamling M3 och D3

Poängberäkning: Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. **Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!**

Tentamensresultat: Granskning av rättningen erbjuds den 6 september - tid och plats kommer att anslås på PingPong. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

Uppgift 1.

a. Ett andra ordningens system beskrivs av differentialekvationen

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u(t-2)$$

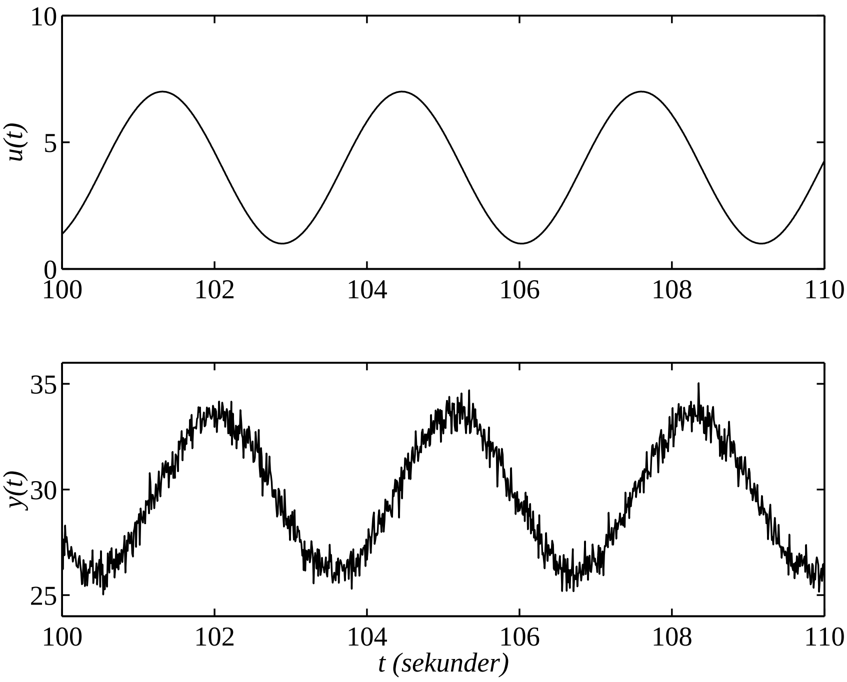
där som vanligt u är insignal och y utsignal. Bestäm systemets stegsvar. (2 p)

b. Ett dynamiskt system med insignalen u och utsignalen y beskrivs av differentialekvationen

$$\dot{y}(t) + \sin y(t) = \cos u(t)$$

Linjärisera differentialekvationen kring den stationära lösning som ges av $u = y = \pi/4$ och bestäm det linjäriserade systemets överföringsfunktion från insignal till utsignal. (2 p)

c. En frekvensanalys har genomförts på en process med resultatet nedan. I figuren visas insignalen $u(t)$ och utsignalen $y(t)$, den senare uppmätt med mätbrus. Anta att processen kan beskrivas som ett första ordningens system utan dödtid. Bestäm förstärkning och tidskonstant.
OBS! Bortse från offset i signalerna! (2 p)



d. Ett återkopplat system är stabilt och har dessutom en stabil kretsöverföring. Anta att känslighetsfunktionen $S(i\omega)$ uppfyller följande krav:

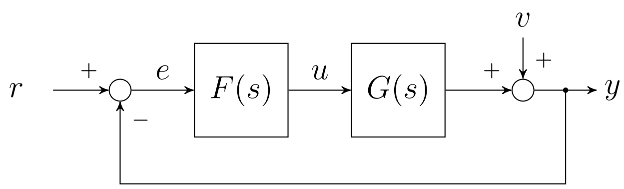
$$|S(i\omega)| \leq 2$$

Vilken amplitudmarginal garanterar detta? (2 p)

e. En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{s+2}{s^2+s+1}$$

återkopplas med en P-regulator $F(s) = K = 2$ enligt nedan.



Vad blir det kvarstående felet då v är en stegstörning med amplituden 10 (anta $r = 0$)? (2 p)

Lösning:

a. Laplacetransformering ger överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{e^{-2s}}{s(s+1)}$$

Utan tidsfördröjningen ges stegsvaret av ($U(s) = 1/s$)

$$Y(s) = \frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

vilket i tidsplanet motsvarar

$$y(t) = t - 1 + e^{-t}, \quad t \geq 0 \quad (y(t) = 0,\ t < 0)$$

Med en tidsfördröjning på 2 s fås istället ($t \to t - 2$)

$$y(t) = t - 3 + e^{-(t-2)}, \quad t \geq 2 \quad (y(t) = 0,\ t < 2)$$

b. *Linjärisering ger*

$$\Delta\dot{y}(t) + \cos\pi/4 \cdot \Delta y(t) = -\sin\pi/4 \cdot \Delta u(t)$$

vilket efter Laplace-transformering ger överföringsfunktionen

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta U(s)} = -\frac{1/\sqrt{2}}{s + 1/\sqrt{2}}$$

c. *Följande kan utläsas av registreringen (ungefärliga siffror):*

- *Periodtid c:a* 3.1 *s, vilket svarar mot* $\omega \approx 2\pi/3.1 \approx 2$.
- *Tidsförskjutning på c:a 0.7 s, vilket svarar mot en fasförskjutning* $\varphi \approx \frac{0.7}{3.1} \cdot 2\pi \approx 1.4$ *rad.*
- *Förstärkning på c:a 1.1.*

För ett första ordningens system $G(s) = K/(1 + sT)$ *ges förstärkning och fasförskjutning vid frekvensen* ω *av:*

$$|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}, \qquad \arg G(i\omega) = -\arctan \omega T$$

Då kan K *och* T *bestämmas:*

$$\arg G(i\omega) = -\arctan \omega T = -1.4 \quad \Rightarrow \quad T = \tan(1.4)/2 \approx 2.9$$
$$|G(i\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}} = 1.1 \quad \Rightarrow \quad K \approx 5.9 \cdot 1.1 \approx 6.5$$

d. *Nyquists förenklade stabilitetskriterium gäller eftersom* $L(s)$ *är stabil. Alltså passerar* $L(i\omega)$ *till höger om den kritiska punkten* $(-1, 0)$. *Känslighetsfunktionen ges av* $S(s) = 1/(1 + L(s))$, *där* $L(s)$ *är kretsöverföringen, vilket ger*

$$|S(i\omega)| \leq 2 \quad \Leftrightarrow \quad |1 + L(i\omega)| \geq 1/2$$

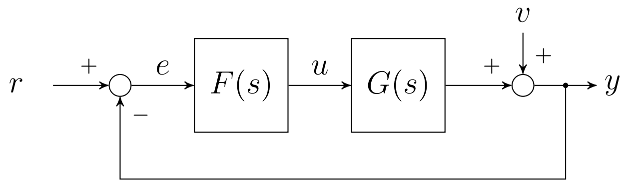
dvs avståndet från $L(i\omega)$ *till punkten -1 är större än 0.5. Alltså korsar kurvan negativa realaxeln till höger om punkten* $(-0.5, 0)$, *vilket innebär att amplitudmarginalen uppfyller* $A_m \geq 2$.

e. *Kvarstående felet kan beräknas med användning av slutvärdessatsen:* $e_\infty = (1/(1 + KG(0)) \cdot 10 = 2$.

Uppgift 2.
En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{10}{1+4s}e^{-s/2}$$

skall återkopplas med regulatorn $F(s)$ enligt blockschemat nedan:



a. Välj lämplig regulator till systemet och bestäm regulatorparametrarna, så att nedanstående specifikationer uppfylls:

1. Inga kvarstående fel efter stegformade processtörningar v.
2. Systemets fasmarginal ska vara $\varphi_m = 60°$.
3. Skär(överkorsnings-)frekvensen får inte understiga $\omega_c = 1$ rad/s.

(3 p)

b. Skissa kretsöverföringens amplitud- och faskurvor i ett Bodediagram och verifiera att kravspecifikationerna 2 och 3 uppfylls av din design i (a). (2 p)

Lösning:

a. Krav 1 innebär att integralverkan behövs, dvs pröva en PI-regulator $F(s) = K_i\frac{1+T_i s}{s}$. *Vid* $\omega_c = 1$ *har processen fasförskjutningen* $\arg G(i\omega_c) = -\arctan 4\omega_c - \omega_c/2 \approx -1.83\text{rad} = -104.6°$. *Med* $\varphi_m = 60°$, *så kan vi alltså låta regulatorn ge ytterligare* $180 - 60 - 104.6 = 15.4°$ *fasförskjutning vid* $\omega = \omega_c = 1$. *Detta ger* $\arg F(i\omega_c) = \arctan T_i\omega_c - \pi/2 = -15.4 * \pi/180$ *eller* $T_i = \tan 74.6° \approx 3.6$. *Justera slutligen förstärkningen så att* $|F(i\omega_c)G(i\omega_c)| = K_i\sqrt{1+T_i^2}\cdot 10/\sqrt{17} = 1$, *vilket ger* $K_i = 0.11$.

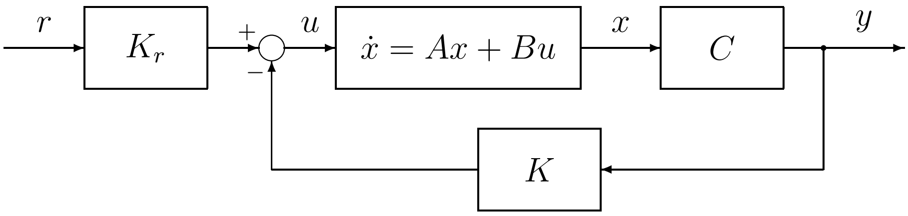
b. Kretsöverföringen är $L(s) = 1.1\frac{1+3.6s}{s(1+4s)}e^{-s/2}$, *vilket ger*

$$|L(i\omega)| = 1.1\frac{\sqrt{1+(3.6\omega)^2}}{\omega\sqrt{1+(4\omega)^2}}$$
$$\arg L(i\omega) = -\pi/2 + \arctan 3.6\omega - \arctan 4\omega - \omega/2$$

Amplituddelen har LF-asymptoten $|L(i\omega)| \approx 1.1/\omega$ och HF-asymptoten $|L(i\omega)| \approx 0.9/\omega$. Skissen kompletteras med några punkter, vilket verifierar att krav 2 och 3 är uppfyllda.

Uppgift 3.

Betrakta följande återkopplade system:



där

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

dvs r, u och y är skalärer, men tillståndsvektorn x har två element.

a. Bestäm K så att det återkopplade systemet får en pol i -1. (3 p)

b. Bestäm K_r så att ärvärdet y är lika med börvärdet r för långsamma börvärdesändringar. (2 p)

Lösning:

a. Överföringsfunktionen från u till y ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-4s+4}{s^2+s+2}$$

Överföringsfunktionen från r till y blir då

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r G(s)}{1 + KG(s)} = \frac{K_r(-4s+4)}{s^2+s+2+K(-4s+4)} = \frac{K_r(-4s+4)}{s^2+(1-4K)s+4K+2}$$

En pol skall ligga i $s = -1$, dvs nämnaren i G_{ry} skall bli 0 för $s = -1$, vilket ger kravet $K = -1/4$.

b. Med K enligt ovan får vi

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r(-4s+4)}{s^2+2s+1} = \frac{K_r(-4s+4)}{(s+1)^2}$$

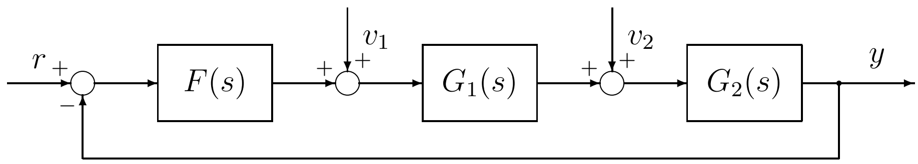
dvs även den andra polen hamnar i -1. Kravet på följning av långsamma börvärdesändringar ger

$$G_{ry}(0) = 1 \quad \Rightarrow \quad K_r = 1/4.$$

Uppgift 4.
Vi skall studera två alternativa regulatorstrukturer för att lösa ett och samma reglerproblem.

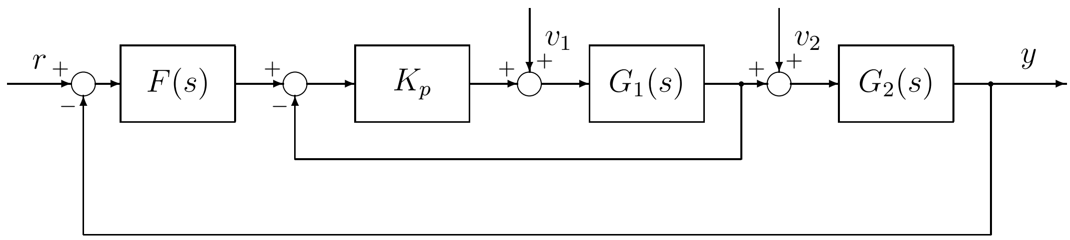
a. Betrakta det återkopplade systemet nedan. Systemet består av två delsystem med överföringsfunktioner $G_1(s)$ och $G_2(s)$ och påverkas av två störningar v_1 och v_2. Regulatorn F är en P-regulator. Överföringsfunktionerna ges av:

$$F(s) = 5 \qquad G_1(s) = \frac{3}{1+4s} \qquad G_2(s) = \frac{1}{s}$$



Uppgift: Bestäm det kvarstående felet, då v_1 är en stegformad störning med amplituden 2. (2 p)

b. Med avsikten att snabbare kompensera bort störningen v_1, så införs nu en kaskadreglering enl figuren nedan.



Uppgift: Bestäm för vilka värden på K_p man får en förbättring jämfört med (a), dvs ett mindre kvarstående fel (med samma stegstörning v_1). (3 p)

Lösning:

a. Det slutna systemets överföringsfunktion från v_1 till y är

$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1 G_2}{1 + F G_1 G_2} = \frac{3}{s(1+4s) + 5 \cdot 3}$$

Av detta framgår att slutna systemet är stabilt (positiva koefficienter i ett 2:a ordningens kar.pol.), dvs vi kan använda slutvärdessatsen:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y(s) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{3}{s(1+4s)+5\cdot 3} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{5}$$

Det kvarstående felet får motsatt tecken, eftersom $e = r - y$.

b. *Om vi kallar utsignalen från blocket G_1 för y_1, så gäller*

$$Y_1 = \frac{G_1}{1+K_pG_1}V_1 - \frac{K_pG_1F}{1+K_pG_1}Y$$

och tillsammans med $Y = G_2Y_1$ ger detta, efter att ha löst ut Y:

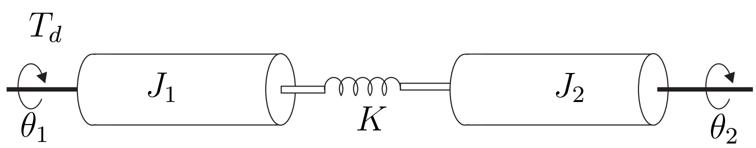
$$\frac{Y(s)}{V_1(s)} = \frac{G_1G_2}{1+K_pG_1+K_pFG_1G_2} = \frac{3}{s(1+4s)+3K_ps+15K_p}$$

På samma sätt som i (a) ser man att det slutna systemet är stabilt, och slutvärdessatsen kan användas:

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot \frac{3}{s(1+4s)+3K_ps+15K_p} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{5K_p}$$

Det kvarstående felet får motsatt tecken som i (a). Slutsatsen är att man får ett mindre kvarstående fel om $K_p > 1$.

Uppgift 5.
Betrakta drivaxeln i figuren nedan.



Det drivande momentet $T_d(t)$ är systemets insignal. Rotationsvinkeln för de två axelhalvorna med tröghetsmomenten J_1 respektive J_2 är $\theta_1(t)$ respektive $\theta_2(t)$. Vinkelhastigheten för de två halvorna är $\omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t)$ respektive $\omega_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$. De två axelhalvorna förbinds med en torsionsfjäder, och momentet över denna är proportionellt mot vinkelskillnaden med proportionalitetskonstanten K. Friktionen försummas.

a. Bestäm en tillståndsmodell på (A, B, C)-form för systemet med utnyttjande av tre tillståndsvariabler: $x_1 = \theta_1 - \theta_2$, $x_2 = \omega_1$ och $x_3 = \omega_2$. Låt utsignalen vara vinkelhastigheten ω_2 på höger axelhalva. (3 p)

b. Avgör om utsignalen $\omega_2(t)$ alltid kommer att gå mot 0 då det drivande momentet $T_d(t)$ går mot 0. (2 p)

Lösning:

a. Newtons lag för roterande system ger

$$\begin{aligned} J_1\dot{\omega}_1(t) &= T_d(t) - K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \\ J_2\dot{\omega}_2(t) &= K(\theta_1(t) - \theta_2(t)) \end{aligned}$$

Med de föreslagna tillståndsvariablerna fås

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t) = \omega_1(t) - \omega_2(t) \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{\omega}_1(t) = -\frac{K}{J_1}x_1(t) + \frac{1}{J_1}T_d(t) \\ \dot{x}_3(t) &= \dot{\omega}_2(t) = \frac{K}{J_2}x_1(t) \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -K/J_1 & 0 & 0 \\ K/J_2 & 0 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J_1 \\ 0 \end{bmatrix} T_d(t) \\ y(t) &= \omega_2(t) = Cx(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{aligned}$$

b. Lösning av systemekvationerna (alternativt direkt beräkning av överföringsfunktionen) ger

$$Y(s) = \frac{K}{J_1J_2}\frac{1}{s(s^2 + K/J_1 + K/J_2)}T_d(s)$$

På grund av den rena integratorn, så följer inte av $T_d(t) \to 0$ att $y(t) \to 0$. Man kan också direkt verifiera i systemekvationerna att en lösning med $T_d = 0$ ges av $x_1 = 0$, $x_2 = x_3 =$ konst. Att axeln fortsätter att rotera utan drivande moment beror på att friktionen försummats.

SLUT!