CHALMERS TEKNISKA HÖGSKOLA
Institutionen för signaler och system
Reglerteknik, automation och mekatronik

# ERE 102 Reglerteknik D
# Tentamen 2012-12-21

14.00 – 18.00

Examinator: Bo Egardt, tel 3721.

**Tillåtna hjälpmedel:**

- Typgodkänd räknare
- Beta
- Formelblad (bilagd tentatesen)

**Poängberäkning:** Tentamen består av 5 uppgifter om totalt 30 poäng. Nominella betygsgränser är 12 (3), 18 (4) respektive 24 (5) poäng. Lösningarna skall vara tydliga och väl motiverade!

**Tentamensresultat:** Granskning av rättningen erbjuds den 17 januari kl 11.00 – 12.00. Kommer du senare mottages endast skriftliga klagomål mot rättningen. Sådana skriftliga klagomål måste lämnas in **senast två veckor** efter ordinarie granskning.

LYCKA TILL!

**Uppgift 1.**

a. Ett dynamiskt system med insignalen $u$ och utsignalen $y$ beskrivs av differentialekvationen

$$10\,\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) = u^2(t)$$

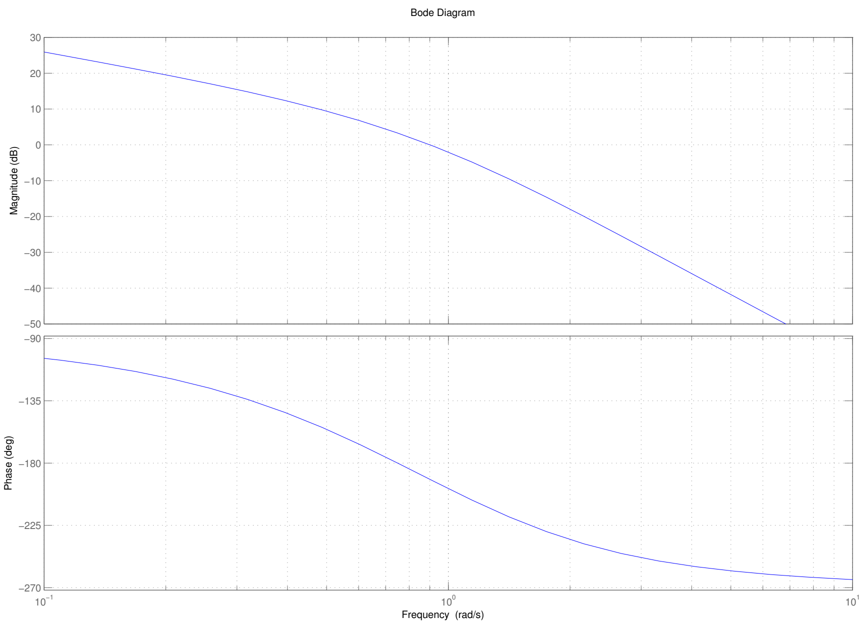
Linjärisera differentialekvationen kring $u = 1$ och bestäm överföringsfunktionen från insignal till utsignal. (2 p)

b. Vid ett experiment mäts impulssvaret för ett system upp med följande resultat:

$$g(t) = e^{-0.5t}\big(1 + \cos 0.5t\big)$$

Vilken är systemets statiska förstärkning? (2 p)

c. En PI-regulator har dimensionerats för att användas i återkopplad reglering av en stabil process. Resultatet av dimensioneringen syns i Bode-diagrammet nedan, som visar kretsförstärkningens egenskaper. Ingår i processens dynamik en ren integration? Är det återkopplade systemet stabilt? (2 p)

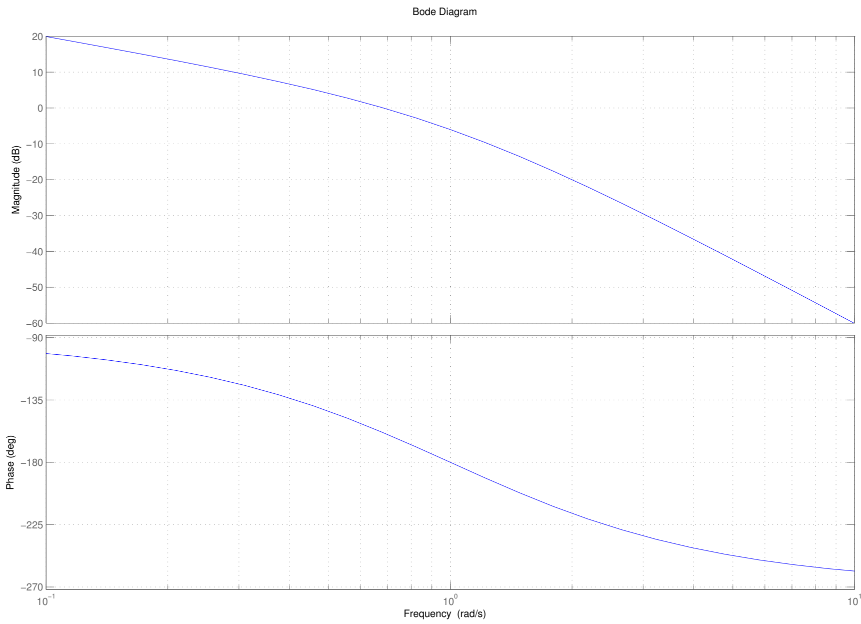


d. I en mailserver kan antalet aktiva processer $y$ påverkas av driftparametern $MaxUsers$, här betecknad $u$. Dynamiken kan beskrivas av den tidsdiskreta överföringsfunktionen

$$\frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{0.47}{z - 0.43}$$

En P-regulator används för att återkoppla systemet, med syftet att hålla $y$ någorlunda konstant. Bestäm P-regulatorns förstärkning så att det slutna systemet har en pol i origo. Vad händer om förstärkningen ökas ytterligare? (2 p)

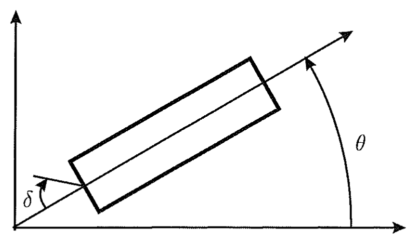
e. Figuren nedan visar **kretsförstärkningen** för en reglerkrets. En sinusformad mätstörning med frekvensen $\omega = 2$ rad/s påverkar mätningen som används för återkopplingen. Hur mycket av denna mätstörning slår igenom i processens utsignal? Ett approximativt värde räcker! (2 p)



**Uppgift 2.**
I en artikel från 1922 studerade den rysk-amerikanske forskaren Minorsky riktningsstyrning av fartyg. Modellen som användes för att beskriva ett fartyg för en given hastighet var

$$J\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} + D\frac{d\theta(t)}{dt} = K\delta(t) + M_d(t)$$

där $\theta(t)$ är kursvinkeln, $\delta(t)$ är roderutslaget och $M_d(t)$ beskriver störande moment pga vågor, strömmar och vind; se figuren nedan.




Genom att mäta kursvinkeln kunde man använda en regulator för att automatiskt ställa ut lämpliga roderutslag. I artikeln gjordes också en indelning av regulatorer i olika typer enligt nedan, där det antagits att önskad kursvinkel (börvärdet) är 0.

$$\begin{aligned}
\text{I.}\quad & \delta(t) = -k_1\theta(t) - k_2\frac{d\theta(t)}{dt} - k_3\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\
\text{II.}\quad & \frac{d\delta(t)}{dt} = -k_1\theta(t) - k_2\frac{d\theta(t)}{dt} - k_3\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \\
\text{III.}\quad & \frac{d^2\delta(t)}{dt^2} = -k_1\theta(t) - k_2\frac{d\theta(t)}{dt} - k_3\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}
\end{aligned}$$

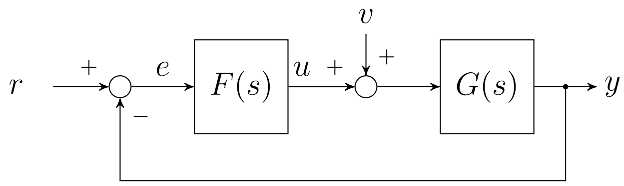
a. Rita ett blockdiagram över det återkopplade systemet med en regulator av typ I. Ange blockens överföringsfunktioner och in- och utsignaler och markera vad som är regulator och vad som är fartygsdynamik. Glöm inte att ange var processtörningen kommer in i blockdiagrammet. (3 p)

b. Vilken av regulatortyperna ovan svarar mot det vi idag kallar en PID-regulator? Motivera! (2 p)

**Uppgift 3.**
En process med överföringsfunktionen

$$G(s) = \frac{1}{s(s+4)^2}$$

skall återkopplas enligt figuren nedan:




a. Man önskar att det kvarstående felet efter en stegstörning i $v$ skall elimineras. Vad måste i så fall gälla för $F(s)$? (1 p)

b. Bestäm överkorsningsfrekvensen $\omega_c$ enligt tumregeln $\omega_c = 0.4\,\omega_{150}$, där $\arg G(i\omega_{150}) = -150°$. (1 p)

c. Dimensionera en regulator som uppfyller följande krav:

- Kvarstående fel efter en stegstörning i $v$ skall elimineras (enligt deluppgift a).
- Överkorsningsfrekvensen $\omega_c$ skall väljas enligt deluppgift b.
- Den önskade fasmarginalen är $\varphi_m = 50°$.

(3 p)

**Uppgift 4.**
Vi skall undersöka en enkel återkoppling av en process, som beskrivs av följande överföringsfunktion:

$$G(s) = \frac{1}{s(s^2+s+1)}$$

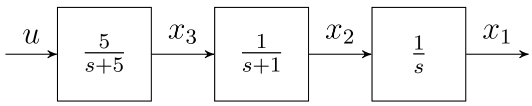
a. Bestäm förstärkningen för en P-regulator som ger en amplitudmarginal på 2.5. (2 p)

b. Hur stor blir fasmarginalen med den P-regulator som bestämts i deluppgift a? (2 p)

c. Anta att processen, förutom dynamiken som ges av $G(s)$, också har en transportfördröjning. Hur stor kan denna vara, om det slutna systemet skall bibehålla sin stabilitet med P-regulatorn från deluppgift a? (1 p)

**Ledning**: uppgiften kan lösas med användning av Bode-diagram i formelbladet och enkla räkningar! Approximativa svar räcker!

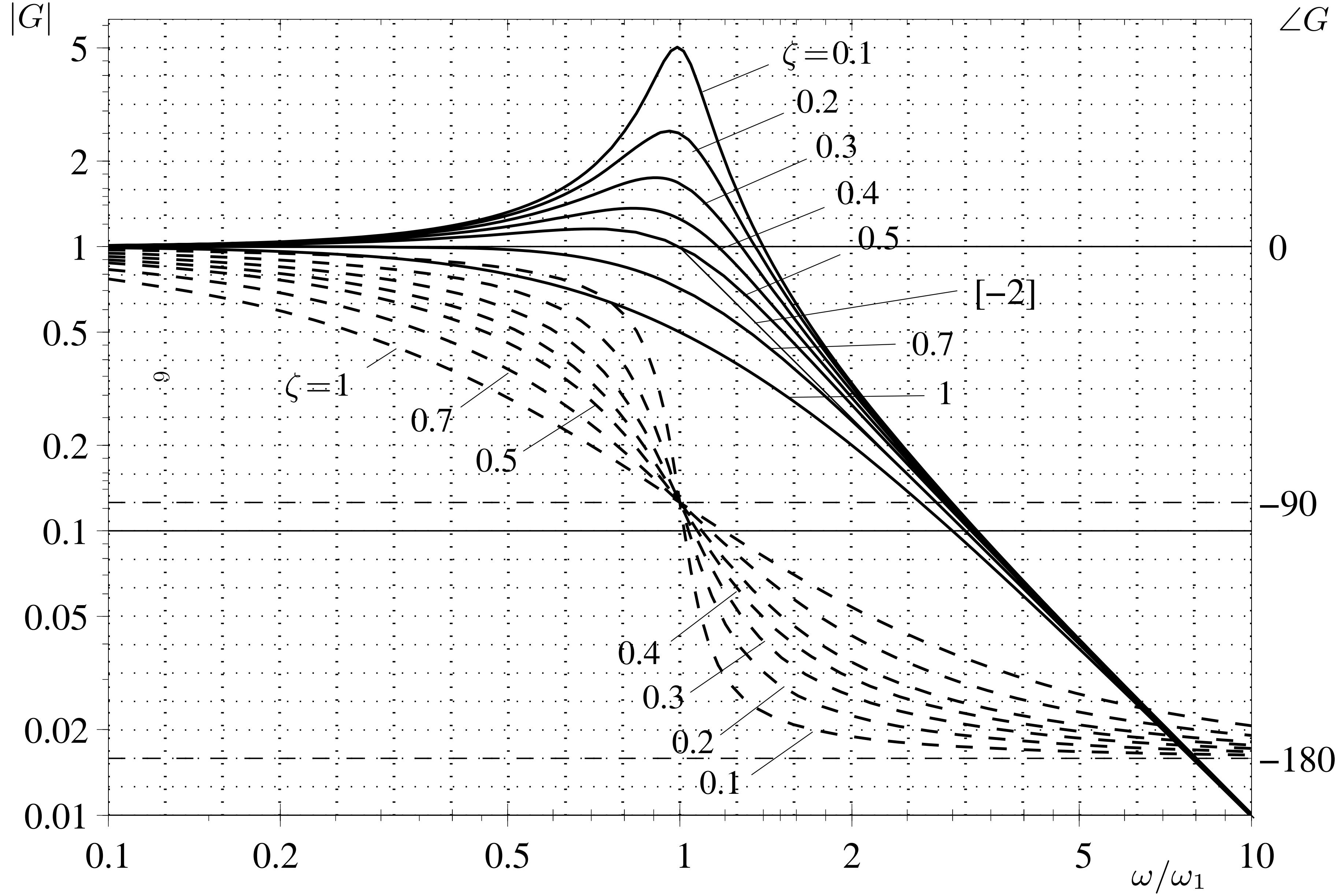
**Uppgift 5.**
Ett positioneringssystem för en satellitantenn skall styras med återkoppling. Positioneringssystemet, som visas i blockschemat nedan, består av en motor med växellåda som roterar antennen och på så sätt riktar in den mot den aktuella satelliten.
Utsignalen från regulatorn är $u$ som är en spänning. Spänningen styr en motor, som ger ett vridmoment $x_3$. Vridmomentet påverkar antennens rotationshastighet $x_2$, som sedan ger en position $x_1$.




a. Ställ upp en tillståndsmodell för systemet. (2 p)

b. Bestäm en tillståndsåterkoppling, som ger det slutna systemet en pol i $p_1 = -10$ samt två komplexkonjugerade poler i $p_{2,3} = -1 \pm i$. (3 p)

SLUT



$|G|$
$\angle G$
5
2
1
0.5
0.2
0.1
0.05
0.02
0.01
0
−90
−180
0.1
0.2
0.5
1
2
5
10
$\omega/\omega_1$
$\zeta=0.1$
0.2
0.3
0.4
0.5
[−2]
0.7
1
$\zeta=1$
0.7
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1

## Lösningsskisser

1. (a) L-transformering och linjärisering ger $(10s^2+s)Y(s) = 2\cdot 1\cdot \Delta U(s)$ dvs $G(s) = \frac{2}{s(10s+1)}$.

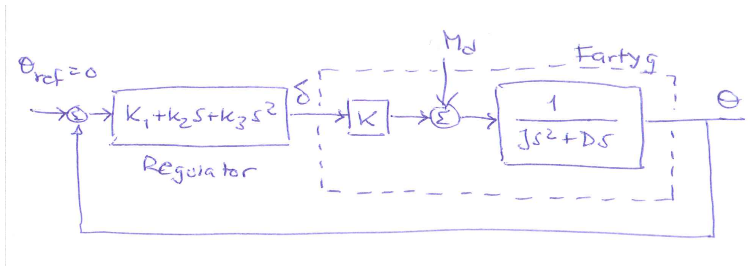
   (b) Impulssvaret ger efter L-transformering $G(s) = \frac{1}{s+0.5} + \frac{s+0.5}{(s+0.5)^2+0.5^2}$ med statiska förstärkningen $G(0) = 2 + 1 = 3$.

   (c) Lågfrekvensasymptoten lutar -20 dB per dekad, vilket svarar mot PI-regulatorns I-del, dvs processen har ingen integration. Systemet är instabilt, eftersom fasmarginalen är negativ.

   (d) Slutna systemets öf ges av $\frac{0.47K_p}{z-0.43+0.47K_p}$, dvs $K_p = 0.43/0.47$ ger pol i origo. Större $K_p$ ger poler på negativa reella axeln, som ger oscillativt stegsvar.

   (e) Figuren ger $|L(i\cdot 2)| \approx -20dB = 0.1$ och dessutom gäller $|T| \approx |L|$ i detta frekvensområde. Mätstörningen dämpas alltså ungefär en faktor 10.

2. (a) Blockschema:




   (b) Regulator typ II har överföringsfunktionen

$$F(s) = \frac{k_1 + k_2 s + k_3 s^2}{s} = k_2 + \frac{k_1}{s} + k_3 s = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

   dvs den motsvarar en PID-regulator utan filtrering av D-delen.

3. (a) Slutvärdessatsen tillämpad på $G_{vy} = \frac{G}{1+FG}$ ger kravet $1/F(0) = 0$, dvs regulatorn måste innehålla en integration.

   (b) $\arg G(i\omega_{150}) = -90° - 2\arctan \omega_{150}/4 = -150°$ ger $\omega_{150} \approx 2.3$ och $\omega_c \approx 0.9$.

   (c) Från deluppgift (a) följer att det verkar vara en god idé att välja en PI-regulator $F(s) = K_p(1 + \frac{1}{T_i s})$. Från $\arg G(i\omega_c) = -116°$ följer att PI-regulatorn kan tillåtas sänka fasen med 14° (180-116-50), vilket ger $\arg F(i\omega_c) = \arctan(\omega_c T_i) - 90^\circ = -14^\circ$, dvs $T_i \approx 4.5$. Slutligen ger villkoret $|F(i\omega_c)G(i\omega_c)| = 1$ att $K_p$ skall väljas som

$$K_p = \frac{\omega_c(\omega_c^2 + 4^2) \cdot T_i\omega_c}{\sqrt{(1 + (T_i\omega_c)^2}} \approx 15$$

4. (a) Notera först att $s^2+s+1$ svarar mot ett komplexkonjugerat polpar med $\zeta = 1/2$ och $\omega_n = 1$. Från $\arg G(i\omega_\pi) = -180^\circ$ fås $\omega_\pi = 1$ (integratorn ger $-90^\circ$ och de komplexkonjugerade polerna ger $-90^\circ$ vid $\omega = \omega_n = 1$). Eftersom $|G(i\omega_\pi)| = |G(i \cdot 1)| = 1$, så ger $K_p = 0.4$ en amplitudmarginal $A_m = 1/0.4 = 2.5$.

   (b) Överkorsningsfrekvensen ges av villkoret $|L(i\omega_c)| = 0.4|G(i\omega_c)| = 1$ eller

$$\frac{1}{|s^2 + s + 1|}\bigg|_{s=i\omega_c} = 2.5\omega_c$$

   Beloppet i VL kan avläsas i Bodediagram för olika frekvenser, och ett par avläsningar ger $\omega_c \approx 0.4 - 0.5$. Motsvarande fasbidrag kan avläsas och är c:a $-30^\circ$, vilket med integratorns $-90^\circ$ ger $\arg L(i\omega_c) \approx -120^\circ$. Fasmarginalen är alltså c:a $60^\circ$.

   (c) Tidsfördröjningen $T$ ger fasbidraget $-\omega_c T$ vid överkorsningsfrekvensen. Tillåten tidsfördröjning fås då från $\omega_c T = \frac{60}{180}\pi$, dvs $T \approx 2.1 - 2.6$.

5. (a) Tillståndsmodellen blir:

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2\\ \dot{x}_2 &= -x_2 + x_3\\ \dot{x}_3 &= -5x_3 + 5u\end{aligned}$$

   (b) Efter tillståndsåterkoppling fås systemmatrisen

$$A - BL = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -5l_1 & -5l_2 & -5 - 5l_3 \end{bmatrix}$$

   som ger det karakteristiska polynomet $\det(sI - A + BL) = s^3 + (6 + 5l_3)s^2 + (5 + 5l_3 + 5l_2)s + 5l_1$, vilket skall vara lika med det specificerade, nämligen $(s+10)((s+1)^2+1) = s^3+12s^2+22s+20$. Detta ger $l_1 = 4, l_2 = 2.2, l_3 = 1.2$.