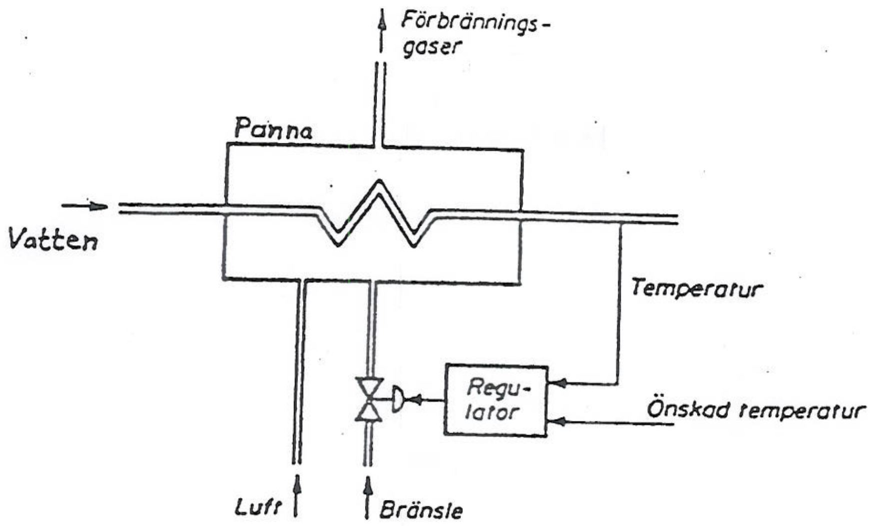
TENTAMEN REGLERTEKNIK D 2008-12-15

1



Man vill reglera en uppvärmningsanläggning för vatten enligt figuren ovan. Avsikten är att styra bränsletillförseln så att temperaturen på det uppvärmda vattnet hålls konstant. Genom stegexperiment har man funnit att en användbar modell för processen med tillhörande bränsleventil och temperaturgivare har överföringsfunktionen:

$$G(s) = \frac{2 \cdot e^{-1,2s}}{(1 + 6,25s)(1 + s)}$$

där tiden är mätt i minuter.

Regleringen skall ske med en ren P-regulator $(G(s) = K)$

Uppgifter: a) Rita ett exakt Bode-diagram (ej asymptotiskt) för processen

$$G(s) = \frac{2 \cdot e^{-1.2s}}{(1 + 6,25s)(1 + s)}$$

(2 poäng)

b) Bestäm ett K-värde för P-regulatorn, så att fasmarginalen för systemet blir $\phi_m = 30^0$.

(1 poäng)

c) Antag att processen i stället ska regleras med en PID-regulator. Vilka parametrar skall i så fall väljas i denna regulator om vi dimensionerar den med Ziegler-Nichols metod?

(1 poäng)

2

En viss teknisk process beskrivs med följande två olineära tillståndsekvationer, där u betecknar insignalen, y betecknar utsignalen, samt x_1 och x_2 är tillståndsvariabler:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = 6x_2^{\ 2} - 2x_1x_2 - u \\ \dot{x}_2 = 10x_1 - x_2u \end{cases}$$

$$y = 2x_1 + 5x_2$$

För att kunna använda vanligt förekommande metoder (LQ-optimering, tillstånds-återkoppling mm) för dimensionering av reglersystem på tillståndsform ska processen lineariseras. Normalt kommer insignalen u till processen att ha värdet $u_0 = 5$. Linearisera därför processen vid den jämviktspunkt (x_{10}, x_{20}) som fås då $u_0 = 5$. Både x_1 och x_2 ska ha positiva värden i arbetspunkten.

Som svar på uppgiften ska du ange jämviktspunkten, samt koefficienterna i A-, B- och C-matrisen om den lineariserade processen ställes upp på matrisform enligt nedan.

(2p)

$$\begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \cdot \Delta u$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix}.$$

3

a)

En process med den analoga överföringsfunktionen $G(s) = 10/(1+5s)$ ska regleras med den tidsdiskreta proportionella regulatorn $H_R(z) = 3{,}4$.

Beräkna hur långt samplingsintervall man kan ha innan systemet blir instabilt.

(2 p)

b)

Beräkna de första 8 värdena på stegsvaret för en process som beskrivs med följande differensekvation (använd metoden med iterativa beräkningar).

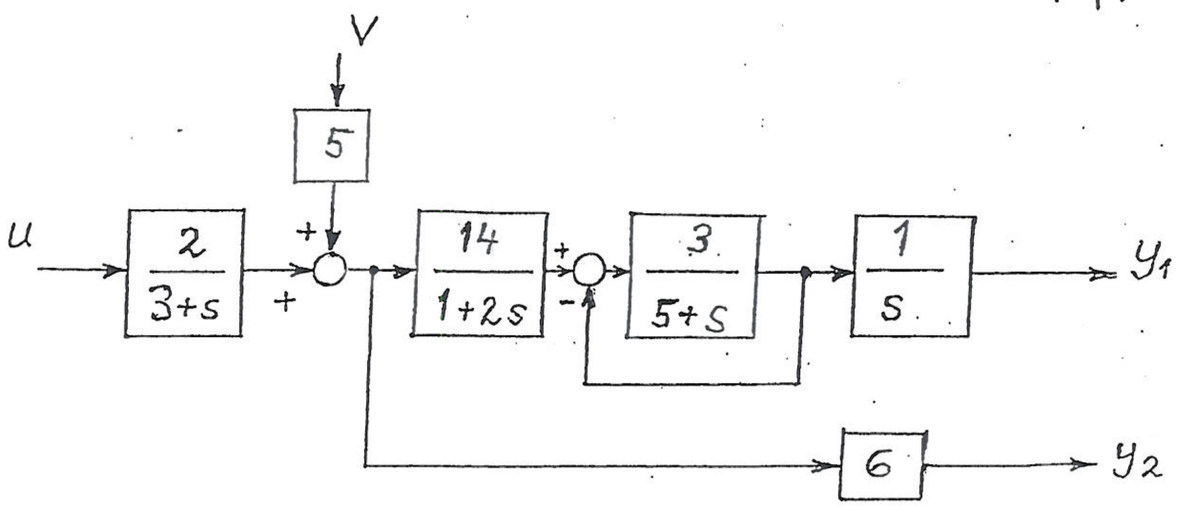
$y(k) = 0{,}6\, y(k-1) + 0{,}3\, u(k-1) + 0{,}7\, u(k-2)$.

(1 p)

4

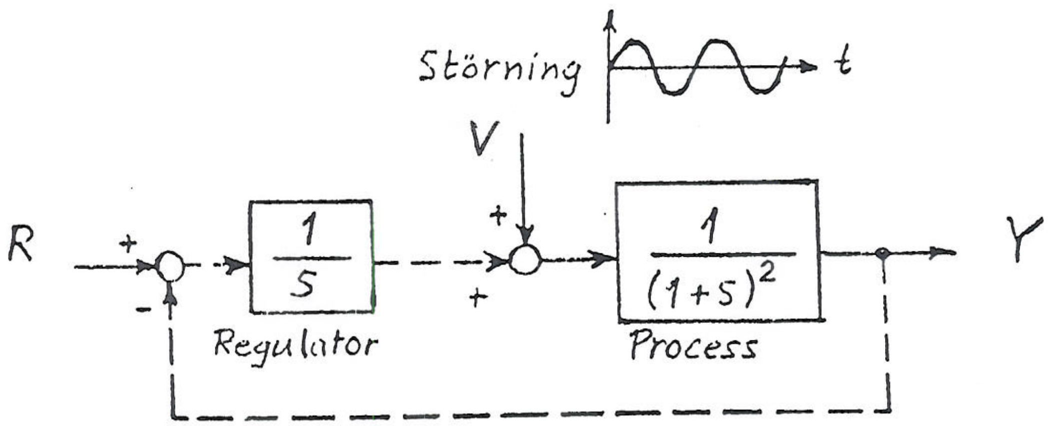
Figuren nedan beskriver ett system med två insignaler (u och v) samt två utsignaler (y_1 och y_2). Ställ upp systemet på tillståndsform. Utsignalerna från de fyra blocken som ligger i serie mellan u och y_1 skall väljas som tillstånd.

(3p)



5

Processen i nedanstående system är utsatt för en sinusformad störning med frekvensen ω = 0,3 rad/s och amplituden A = 5 . Hur stor blir den stationära amplituden på den sinusformade komponenten i utsignalen som uppstår till följd av denna störning? Räkna på fallet med och utan regulatorn inkopplad.



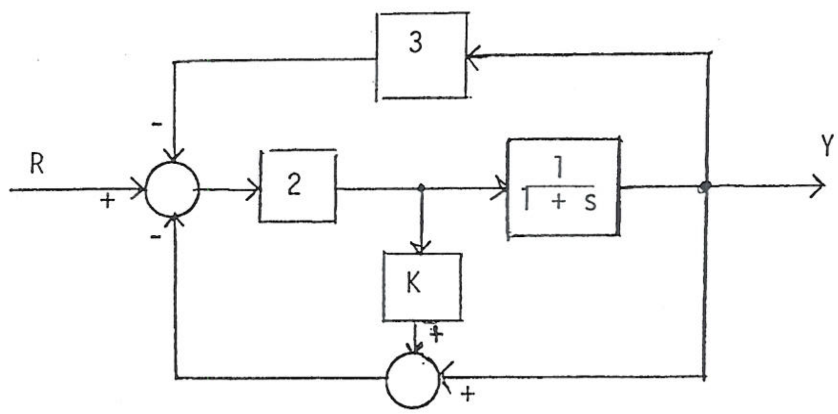
(2 p)

6

Den totala överföringsfunktionen för nedanstående system har beräknats till:

$$G_{TOT} = \frac{Y}{R} = \frac{1}{5{,}5s + 9{,}5}$$

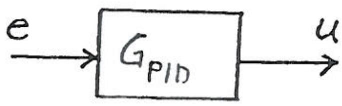
Hur stor var förstärkningen K ? (1 p)



7

Du har just fått anställning på ett företag som tillverkar pappersmaskiner för världsmarknaden. Din första uppgift blir att konstruera ett reglersystem för nivåreglering i inloppslådan till den nya pappersmaskin som företaget snart ska börja tillverka. Genom en noggrann analys av Bodediagrammet för processen kombinerat med datorsimuleringar (med Simulink) har du kommit fram till att en PID-regulator med nedanstående överföringsfunktion troligen kommer att fungera alldeles utmärkt för att reglera processen:

$$G_{PID} = K\left(1 + \frac{1}{T_I \cdot s} + T_d \cdot s\right)$$



Där $K = 5$, $T_D = 1$ och $T_I = 4$

Du föreslår därför för din chef att Ni monterar in en kommersiell PID-regulator i varje pappersmaskin och att ni ställer in den med ovanstående parametrar. Din chef som är mer digitalt lagd beslutar emellertid att ni i stället ska använda en mikrodator för att reglera processen, eftersom det ändå finns flera inbyggda mikrodatorer med ledig kapacitet i pappersmaskinen. Du inser alltså att du blir tvungen att skriva om PID-regulatorns överföringsfunktion till en differensekvation som kan programmeras in i den aktuella mikrodatorn.

Uppgift: Skriv om regulatorns analoga överföringsfunktion ovan till en differensekvation för sambandet mellan e och u. Antag att samplingsintervallet är 1 sekund. Använd bilineär transform.

(2p)

8

$a = -1$ $\qquad \dfrac{z^2 - 0{,}8z + 1}{z^2 - 0{,}64z + 0{,}64}$

a.

Vilken frekvens släcks ut av ett tidsdiskret notchfilter med överföringsfunktionen

$$H(z) = \frac{z^2 - 0{,}8z - a}{z^2 - 0{,}64z - 0{,}64a}$$ och samplingsfrekvensen 800Hz?

(1p)

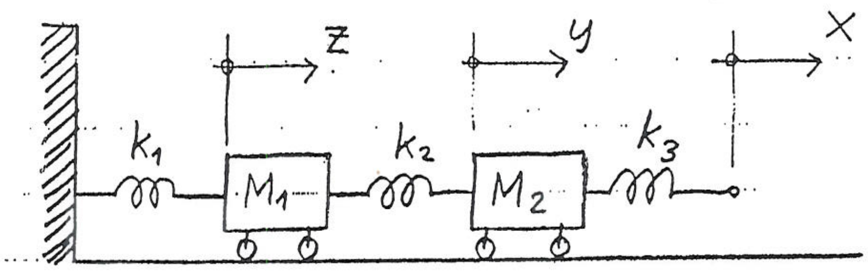
b.

Utgå från motsvarande analoga filter och bestäm överföringsfunktionen för ett tidsdiskret lågpass Butterworthfilter av ordning 2 med samplingsfrekvensen 8kHz och övre gränsfrekvensen 500 Hz.

(2p)

9

En mekanisk process består av två massor M_1 och M_2 förbundna med tre fjädrar med fjäderkonstanterna k_1, k_2 och k_3.



Rullningsfriktionen mot golvet är försumbar. De båda massornas positioner betecknas med y och z. Positionen för fästpunkten på den yttre fjädern betecknas med x.

Uppgift: Beräkna överföringsfunktionen från x till z.

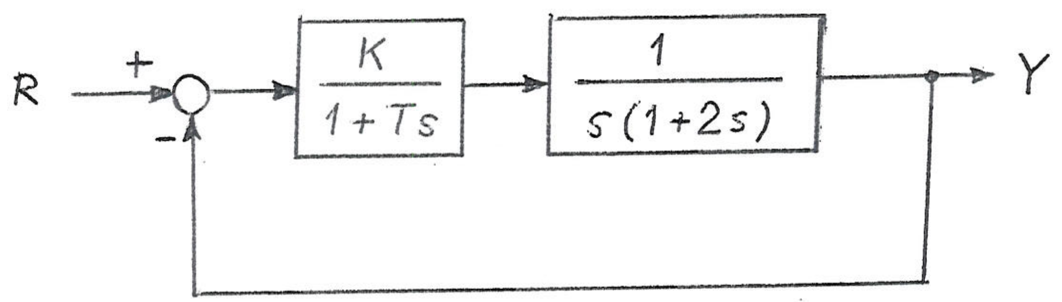
OBS! Svaret ska ges på formen $G(s) = \dfrac{T(s)}{N(s)}$ där täljaren T(s) och nämnaren N(s) är två polynom i s.

(3 p)

10

Blockschemat nedan visar ett reglersystem, där vi kan anta att både K och T är större än noll. Härled för systemet en formel med vilken man kan beräkna det K-värde som, för olika värden på T, ger en önskad amplitudmarginal A_m (i gånger).
Formeln ska alltså vara en funktion av både A_m och T, dvs $K = f(A_m, T)$.

(2 p)



Lösningar Tentamen 2008-12-15

1

a) $$G(j\omega) = \frac{2 \cdot e^{-1,2\, j\omega}}{(1+6,25\, j\omega)(1+j\omega)}$$

$$\angle G(j\omega)^{\circ} = -1,2 \cdot \omega \cdot \left(\frac{180}{\pi}\right) - \arctan(6,25\,\omega) - \arctan(\omega)$$

Tabell:

ω	$\angle G(j\omega)$
0,1	−44,6
0,16	−65,1
0,25	−88,6
0,4	−117,5
0,625	−150,6
1	−194,7
1,25	−219,9

Brytpunkter

$$\omega_{b1} = \frac{1}{6,25} = 0,16 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{b2} = \frac{1}{1} = 1 \text{ rad/s}$$

b) Bodediagrammet ger: önskad överkorsn.frekvens $\omega_c = 0,625$ rad/s

$$|GH(\omega = 0,625)| \approx 0,42 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{1}{0,42} = 2,38$$

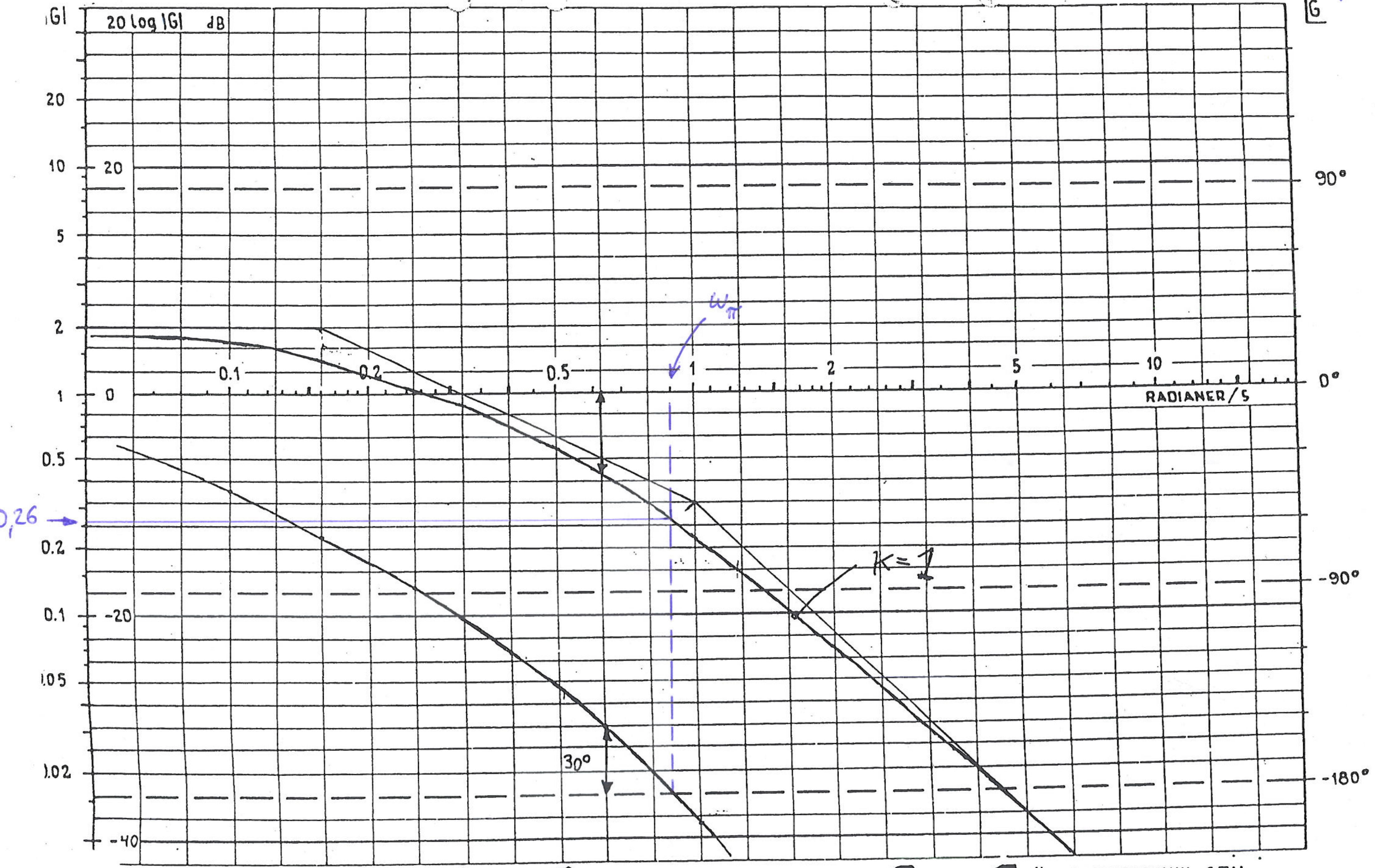
c) $$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = \frac{2\pi}{0,9} = 6,98$$

$$K_0 = \frac{1}{|G(\omega_\pi)|} = 11,5 \text{ dB} \approx 3,76 \approx 3,8$$

Ziegler-Nichols metod ger

$$\boxed{\begin{aligned} K &= 0,6 \cdot 3,8 \approx 2,3 \\ T_I &= 0,5 \cdot 6,98 \approx 3,5 \\ T_D &= 0,125 \cdot 6,98 \approx 0,87 \end{aligned}}$$

1



INSTITUTIONEN FÖR REGLERTEKNIK C.T.H.

2.

Bestämning av arbetspunkten:

$$\begin{cases} 6x_2^2 - 2x_1x_2 - 5 = 0 & (1) \\ 10x_1 - 5x_2 = 0 & (2) \end{cases}$$

$(2) \Rightarrow \quad x_1 = 0{,}5\,x_2$

$(1) \Rightarrow \quad 6x_2^2 - x_2^2 - 5 = 0$

$\Rightarrow \quad 5x_2^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x_2^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x_{20} = 1}$

$x_{10} = 0{,}5 \cdot 1 = 0{,}5 \qquad \boxed{x_{10} = 0{,}5}$

Beräkning av derivator

$$\begin{cases} \dfrac{df_1}{dx_1} = -2x_2 \qquad \dfrac{df_1}{dx_2} = 12x_2 - 2x_1 \qquad \dfrac{df_1}{du} = -1 \\[2ex] \dfrac{df_2}{dx_1} = 10 \qquad \dfrac{df_2}{dx_2} = -u \qquad \dfrac{df_2}{du} = -x_2 \end{cases}$$

Med insatta värden fås

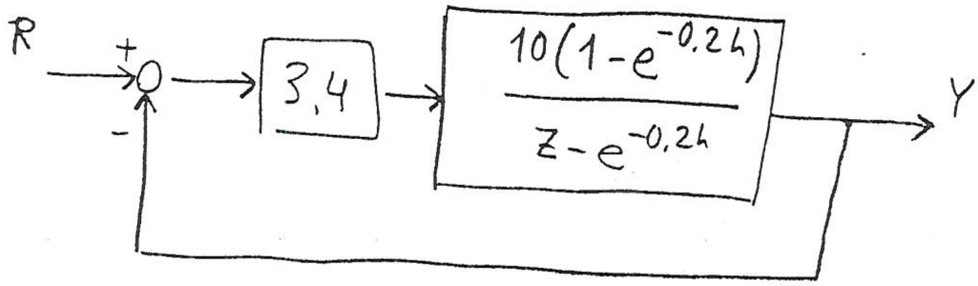
$$\frac{df_1}{dx_1} = -2 \qquad \frac{df_1}{dx_2} = 12 - 1 = 11 \qquad \frac{df_1}{du} = -1$$

$$\frac{df_2}{dx_1} = 10 \qquad \frac{df_2}{dx_2} = -5 \qquad \frac{df_2}{du} = -1$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \Delta\dot{x}_1 \\ \Delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 11 \\ 10 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} \Delta u$$

3

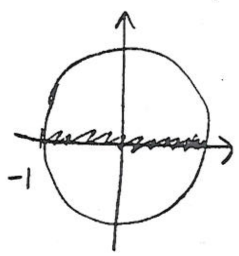
$$G(s) = \frac{10}{1+5s} = \frac{2}{s+0{,}2} \quad \Rightarrow H(z) = 10\,\frac{1-e^{-0{,}2h}}{z-e^{-0{,}2h}}$$



$$H_{tot} = \frac{\dfrac{34(1-e^{-0.2h})}{z-e^{-0.2h}}}{1+\dfrac{34(1-e^{-0.2h})}{z-e^{-0.2h}}} = \frac{34(1-e^{-0.2h})}{z-e^{-0,2h}+34(1-e^{-0.2h})} \Rightarrow$$

Kar. ekv $\Rightarrow$ $z + 34 - 35e^{-0.2h} = 0$

Pol $\quad z = 35e^{-0.2h} - 34$



Villkor $\quad 35e^{-0{,}2h} - 34 > -1$

$$\Rightarrow 35e^{-0.2h} > 33$$

$$e^{-0.2h} > \frac{33}{35}$$

$$e^{-0{,}2h} = \frac{33}{35} \Rightarrow -0{,}2h = \ln\left(\frac{33}{35}\right) \Rightarrow h = -5\cdot\ln\left(\frac{33}{35}\right) = 0{,}294$$

Svar $\quad \text{Max}(h) = 0{,}294$

3b

k	u(k)	0,3 · u(k-1)	0,7 · u(k-2)	0,6 · y(k-1)	y(k)
0	1	0	0	0	0
1	1	0,3	0	0	0,3
2	1	0,3	0,7	0,18	1,18
3	1	0,3	0,7	0,708	1,708
4	1	0,3	0,7	1,0248	2,0248
5	1	0,3	0,7	1,21488	2,21488
6	1	0,3	0,7	1,3289	2,3289
7	1	0,3	0,7	1,3974	2,3974
8	1	0,3	0,7	1,4384	2,4384

4

$$\frac{X_1}{U} = \frac{2}{3+s} \Rightarrow 3x_1 + X_1 s = 2u \Rightarrow \dot{x}_1 = -3x_1 + 2u$$

$$\frac{X_2}{X_1 + 5V} = \frac{14}{1+2s} \Rightarrow X_2(1+2s) = 14X_1 + 70v$$

$$\Rightarrow X_2(s+0{,}5) = 7X_1 + 35v$$

$$\Rightarrow \dot{X}_2 = -0{,}5X_2 + 7X_1 + 35v$$

$$\frac{X_3}{X_2 - X_3} = \frac{3}{5+s} \Rightarrow X_3(5+s) = 3X_2 - 3X_3$$

$$\Rightarrow \dot{X}_3 = 3X_2 - 8X_3$$

$$\frac{X_4}{X_3} = \frac{1}{s} \Rightarrow X_4 s = X_3 \Rightarrow \dot{X}_4 = X_3$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & -0{,}5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 35 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 30 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

5. Utan regulator

$$G_{vr} = \frac{1}{(1+s)^2}$$

$$G_{vr}(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2} \qquad |G_{vr}(\omega)| = \frac{1}{1+\omega^2}$$

$$A_y = 5 \cdot \frac{1}{1+0{,}3^2} = \frac{5}{1{,}09} = 4{,}59$$

Med regulator

$$G_{vr} = \frac{\frac{1}{(1+s)^2}}{1-\left(\frac{-1}{s(1+s)^2}\right)} = \frac{s}{s(1+s)^2+1} = \frac{s}{s^3+2s^2+s+1}$$

$$G_{vr}(j\omega) = \frac{j\omega}{-j\omega^3-2\omega^2+j\omega+1} = \frac{j\omega}{(1-2\omega^2)+j(\omega-\omega^3)}$$

$$A(\omega) = \frac{\omega}{\sqrt{(1-2\omega^2)^2+(\omega-\omega^3)^2}}$$

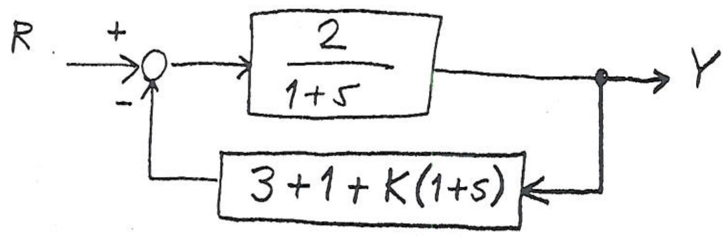
$$A(0{,}3) = \frac{0{,}3}{\sqrt{0{,}82^2+0{,}273^2}} = \frac{0{,}3}{0{,}86425} = 0{,}3471$$

$$A_y = 5 \cdot 0{,}3471 = 1{,}735$$

Svar $\begin{cases} \text{Utan regulator} & A_y = 4{,}59 \\ \text{Med regulator} & A_y = 1{,}735 \end{cases}$

6

Blockschema-transformering ger:



$$G_{TOT} = \frac{2/1+s}{1+\frac{2(4+K(1+s))}{1+s}} = \frac{2}{1+s+8+2K(1+s)} = \frac{2}{9+2K+(1+2K)s} =$$

$$= \frac{1}{\frac{9+2K}{2}+\left(\frac{1+2K}{2}\right)s}$$

Jämförelse ger nu:

$$\frac{1+2K}{2} = 5{,}5 \Rightarrow 1+2K = 11$$

$$\Rightarrow K = 5$$

Kontroll

$$\frac{9+2K}{2} = \frac{19}{2} = 9{,}5 \quad \Rightarrow$$

Svar $K=5$

7. $G_{PID} = 5\left(1 + \frac{1}{4s} + s\right)$ $\begin{cases} \text{Sätt } s = \frac{2(z-1)}{h(z+1)} \\ \text{där } h = 1 \end{cases}$

$$H(z) = 5\left(1 + \frac{z+1}{4 \cdot 2(z-1)} + \frac{2(z-1)}{z+1}\right) =$$

$$= 5\left[\frac{8(z-1)(z+1) + (z+1)^2 + 2(z-1) \cdot 8(z-1)}{8(z-1)(z+1)}\right] =$$

$$= 5\left[\frac{8(z^2-1) + (z^2+2z+1) + 16(z^2-2z+1)}{8(z^2-1)}\right] =$$

$$= 5\left(\frac{25z^2 - 30z + 9}{8z^2 - 8}\right) = \frac{125z^2 - 150z + 45}{8z^2 - 8} =$$

$$= \frac{15{,}625 - 18{,}75z^{-1} + 5{,}625z^{-2}}{1 - z^{-2}} = \frac{U}{E}$$

$$\Rightarrow u(k) = u(k-2) + 15{,}625 \cdot e(k) - 18{,}75\, e(k-1) +$$
$$+ 5{,}625\, e(k-2)$$

Samma med Matlab

```
>> G=tf([20,20,5],[4 0])

Transfer function:
20 s^2 + 20 s + 5
-----------------
       4 s

>> H=c2d(G,1,'tustin')

Transfer function:
15.63 z^2 - 18.75 z + 5.625
---------------------------
          z^2 - 1

Sampling time: 1
```

8.

Lösning på signalbehandlingsuppgift.

a. Den frekvens erhålles som $f = \frac{\Omega}{2\pi} \cdot f_s$, där Ω är vinkeln hos nollstället i övre halvplanet.

Nollställena ges i sin tur av $z^2 - 0{,}8z + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 0{,}4 \pm j\sqrt{1-0{,}4^2} = 0{,}4 \pm j0{,}9165 = e^{\pm j66{,}42^\circ}$, så att

$\Omega = 66{,}42^\circ = 1{,}159$ rad .

Alltså släcks frekvensen $f = \frac{1{,}159}{2\pi} \cdot 800\ \text{Hz} = \underline{\underline{147{,}6\text{Hz}}}$

b. Överföringsfunktionen ges av $H(z) = [H(s)]_{s=\frac{z-1}{z+1}}$, där $H(s) = \dfrac{\omega_g'^2}{s^2 + \dfrac{\omega_g'}{Q} \cdot s + \omega_g'^2} = \dfrac{\omega_g'^2}{s^2 + \sqrt{2} \cdot \omega_g' \cdot s + \omega_g'^2}$ är det

analoga Butterworthfilter som har gränsvinkelfrekvensen $\omega_g' = \tan \frac{\Omega_g}{2}$.

$Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$ är filtrets godhetstal.

Här är Ω_g den normerade vinkelfrekvens som motsvarar det diskreta filtrets övre gränsfrekvens.

$\Omega_g = 2\pi \cdot \frac{500\text{Hz}}{8\text{kHz}} \text{rad} = 0{,}39270 \text{ rad}$.

Detta ger $\omega_g' = \tan \frac{0{,}39270 \text{ rad}}{2} = \tan \frac{22{,}5^\circ}{2} = 0{,}198912$, så att

$$H(s) = \frac{0{,}198912^{\ 2}}{s^2 + \sqrt{2} \cdot 0{,}198912 \cdot s + 0{,}198912^{\ 2}} = \frac{0{,}039566}{s^2 + 0{,}28130 \cdot s + 0{,}039566} \quad \text{och}$$

$$H(z) = \left[\frac{0{,}039566}{s^2 + 0{,}28130 \cdot s + 0{,}039566}\right]_{s=\frac{z-1}{z+1}} = \frac{0{,}039566}{\left(\frac{z-1}{z+1}\right)^2 + 0{,}28130 \cdot \frac{z-1}{z+1} + 0{,}039566} =$$

$$= \frac{0{,}039566 \cdot (z+1)^2}{(z-1)^2 + 0{,}28130 \cdot (z+1)(z-1) + 0{,}039566 \cdot (z+1)^2} = \underline{\underline{\frac{0{,}039566\, z^2 + 0{,}079132\, z + 0{,}039566}{1{,}32087\, z^2 - 1{,}92087\, z + 0{,}758266}}} =$$

$$= 0{,}02995 \cdot \underline{\underline{\frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 1{,}45425\, z + 0{,}57407}}}$$

9 Newtons andra lag för M_1 och M_2 ger:

$$\sum F = m \cdot a$$

Massa 1: $-k_1 z + k_2(y-z) = M_1 \ddot{z}$

Massa 2: $-k_2(y-z) + k_3(x-y) = M_2 \ddot{y}$

Laplace-transformering ger:

$$\begin{cases} -k_1 Z + k_2 Y - k_2 Z = M_1 Z s^2 & (1) \\ -k_2 Y + k_2 Z + k_3 X - k_3 Y = M_2 Y s^2 & (2) \end{cases}$$

Eliminering av Y ger:

$$(2) \Rightarrow Y(M_2 s^2 + k_2 + k_3) = k_2 Z + k_3 X$$

$$Y = \frac{k_2 Z + k_3 X}{(M_2 s^2 + k_2 + k_3)}$$

Insättning i ekv (1) ger:

$$(M_1 s^2 + k_1 + k_2) Z = k_2 \frac{k_2 Z + k_3 X}{(M_2 s^2 + k_2 + k_3)}$$

$$\Rightarrow (M_2 s^2 + k_2 + k_3)(M_1 s^2 + k_1 + k_2) Z = +k_2^2 \cdot Z + k_2 k_3 \cdot X$$

$$Z \left[M_1 M_2 s^4 + \left[(k_1 + k_2) M_2 + (k_2 + k_3) M_1\right] s^2 + (k_2 + k_3)(k_1 + k_2) - k_2^2 \right] = +k_2 k_3 X$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{X} = \frac{k_2 k_3}{M_1 M_2 s^4 + \left[(k_1 + k_2) M_2 + (k_2 + k_3) M_1\right] s^2 + k_1 k_2 + k_1 k_3 + k_2 k_3}$$

10 Den totala överföringsfunktionen blir

$$G_{TOT} = \frac{\dfrac{K}{s(1+Ts)(1+2s)}}{1 + \dfrac{K}{s(1+Ts)(1+2s)}} = \frac{K}{s(1+Ts)(1+2s)+K} =$$

$$= \frac{K}{2Ts^3 + (2+T)s^2 + s + K}$$

Rouths metod ger

s^3	$2T$	1
s^2	$2+T$	K
s^1	a	0
s^0	K	

där $a = \dfrac{(2+T)-2TK}{2+T}$

Stabilitetsvillkor

$(\ 2T>0\ )$ $\quad 2+T-2TK>0 \Rightarrow 2TK < 2+T$

$(\ 2+T>0\ )$

$(\ K>0\ )$ $\quad \Rightarrow K < \dfrac{2+T}{2T}$ för stabilitet

För att få en viss amplitudmarginal A_m (ggr) dividerar vi med A_m, dvs den sökta formeln blir

$$K = \frac{2+T}{2TA_m}$$