Reglerteknik M3

Tentamen 2013-04-02

Tid: 08:30 – 13:30 Lokal: M

Kurskod: ERE033

Lärare: Knut Åkesson, 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timme efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Granskning* av rättning sker den *16* april kl. 12.30 – 13.30 i laborationssalen (vattentankslabbet, rum 5220).

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, Standard Mathematical Tables, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator/smartphone.
- För Erasmusstudenter är lexikon, till och från svenska, tillåtet.

Inga anteckningar är tillåtna!

1

a) Sambandet mellan en insignal $u(t)$) och utsignal $y(t)$ beskrivs av följande differentialekvation.

$$-\ddot{y}(t) - 7\dot{y}(t) - 12y(t) = \dot{u}(t) + 2u(t)$$

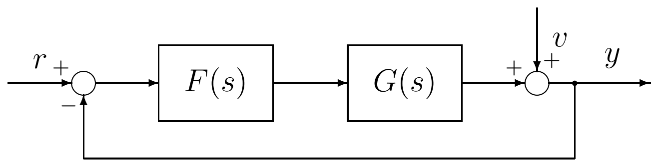
Avgör om systemet är insignal-utsignal stabilt.

(2p)

b) Betrakta återigen systemet i a) uppgiften, bestäm en tillståndsbeskrivning av systemet.

(1p)

c) Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Processen $G(s)$ ges av

$$\frac{1}{(s-1)^2}.$$

Regulatorn $F(s)$ är en PD-regulator med lågpassfilter på D-delen. Alla parametrar i regulatorn är bestämda utom K_p, regulatorn ges av

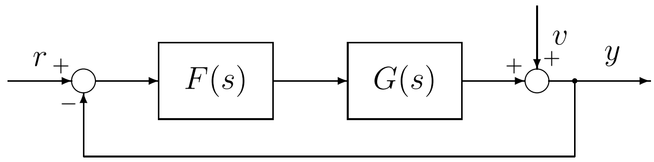
$$F(s) = 1 + K_p \frac{s}{s+3}.$$

Ange alla värden på K_p så att det återkopplade systemet är insignal-utsignal stabilt.

(2p)

2

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Processen ges av

$$G(s) = \frac{1+4s}{s(1+s)^2}e^{-s}.$$

a) Rita Bodediagram för processen G (både fas- och amplituddiagram). Lutningar och brytpunkter ska tydligt markeras.

(3p)

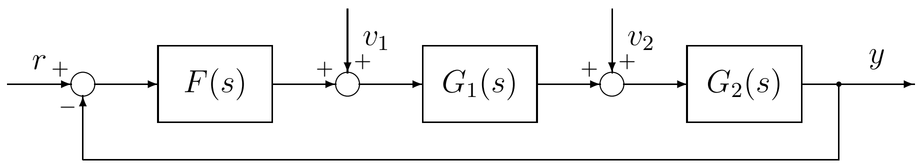
b) Låt processen styras av en P-regulator, dvs. $F(s) = K_p$. Bestäm K_p så att fasmarginalen blir 40°.

(2p)

3

Betrakta det återkopplade systemet nedan. Systemet har två störningskällor, v_1 och v_2, som regleras med en P-regulator.

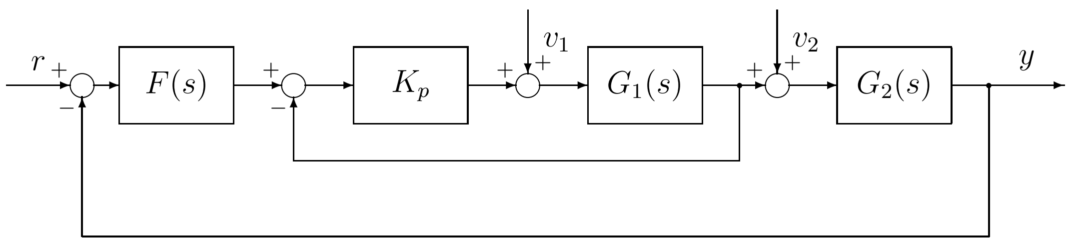
Regulatorstruktur 1



$$F(s) = 5, \quad G_1(s) = \frac{3}{1+4s}, \quad G_2(s) = \frac{1}{s}.$$

För att snabbare kompensera bort störningen v_1 så införs en kaskadreglering enligt figuren nedan.

Regulatorstruktur 2



a) Bestäm det kvarstående felet, då v_1 är en stegformad störning med amplituden 2, för regulatorstruktur 1.

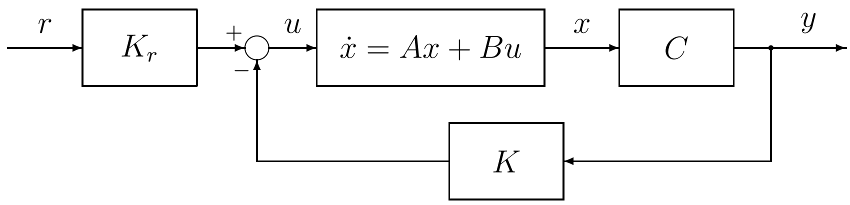
(2p)

b) Bestäm för vilka värden på K_p, då v_1 är en stegformad störning, som regulatorstruktur 2 ger ett mindre kvarstående fel jämfört med regulatorstruktur 1.

(3p)

4

Betrakta följande återkopplade system.



r, u och y är skalärer men tillståndsvektorn x är en kolonnvektor bestående av två element.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Bestäm K så att det återkopplade systemet får en pol i -1.

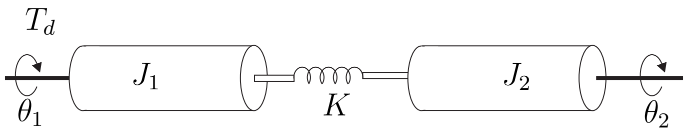
(3p)

b) Bestäm K_r så att ärvärdet blir lika med börvärdet för långsamma börvärdesändringar.

(2p)

5

Betrakta drivaxeln i figuren nedan.



Insignal till systemet är det drivande momentet $T_d(t)$. $\theta_1(t)$ och $\theta_2(t)$ anger vinkeln för vänster resp. höger axelhalva. $\omega_1(t) = \dot{\theta}_1(t)$ och $\omega_2(t) = \dot{\theta}_2(t)$ är vinkelhastigheten för vänster resp. höger axelhalva. Axeln innehåller ett vekt parti i mitten som kan betraktas som en torsionsfjäder med fjäderkonstanten $K > 0$. Det bromsande momentet som verkar på vänster axelhalva ges därför av

$$K(\theta_1(t) - \theta_2(t)).$$

Tröghetsmomenten för de två axelhalvorna är J_1 respektive J_2. Friktionen är försumbar.

a) Bestäm en tillståndsmodell över systemet ovan, använd följande tre tillstånd $x_1(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t)$, $x_2(t) = \omega_1(t)$, $x_3(t) = \omega_2(t)$. Låt utsignalen vara vinkelhastigheten på vänster och höger axelhalva, dvs. utsignalen är en vektor med 2 element.

(3p)

b) Avgör om hastigheten på den högra axelhalvan, dvs. $\omega_2(t)$, alltid kommer att gå mot 0 då det drivande momentet, $T_d(t)$, går mot 0.

(2p)

6

Insignalen till ett filter ges av fyrkantsvågen

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < \pi \\ -1 & -\pi \leq t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = f(t + 2\pi)$$

Filtret släpper igenom frekvenser mellan 40Hz och 60Hz och plockar helt bort övriga frekvenser. Bestäm utsignalen från filtret.

(5p)

Lycka till!

Lösningsförslag

1

a)

$$G(s) = -\frac{s+2}{s^2+7s+12}.$$

Polerna ligger i -3 resp. -4, systemet är alltså insignal-utsignal stabilt.

b) Skriv systemet på styrbar eller observerbar kanonisk form. Nedan har vi valt styrbar kanonisk form.

$$A = \begin{bmatrix} -7 & -12 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -1 & -2 \end{bmatrix}$$

c)

$$L(s) = \frac{(K_p+1)s+3}{(s+3)(s-1)^2}$$

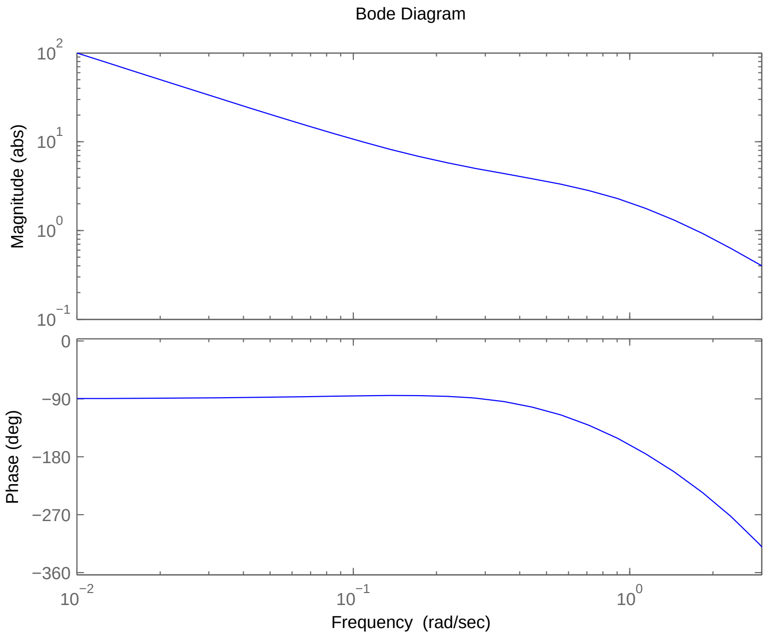
Den karakteristiska polynomet ges därför av

$$s^3 + s^2 + (K_p - 4)s + 6$$

Polerna ges av rötterna till karakteristiska ekvationen. Rötternas läge kan avgöras med Routh-Hurwitz kriterium. Från Routh-Hurwitz får vi att $K_p > 10$.

2

a)



b) Via räkningar alternativt via Bodediagrammet har vi att processen fasvrider $-140°$ vid 0.79 rad/s. Förstärkningen vid denna frekvens är ca. 2.57. Om vi väljer $K_p = 1/2.57 \approx 0.39$ så blir fasmarginalen följdaktligen $40°$.

3

a) Det kvarstående felet är definierat som $\lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$. Eftersom systemet är linjärt och vi vill undersöka hur v_1 påverkar det kvarstående felet kan vi sätta $r(t) = v_2(t) = 0$. Vi vill nu få fram hur y påverkas av v_1, för att få fram dessa samband beräknar vi $G_{v_1 y}$.

För regulatorstruktur 1 gäller att

$$Y = G_2 G_1 (V_1 + F(-Y))$$

Vilket ger att

$$Y = \frac{G_2 G_1}{1 + F G_2 G_1} V_1$$

Eftersom vi kan sätta börvärdet r till 0 (på grund av linjäriteten) så ges det kvarstående felet av $-Y$.

Störsignalen ges av $V_1(s) = 2/s$. Det kvarstående felet ges av

$$-\frac{G_2(s) G_1(s)}{1 + F(s) G_2(s) G_1(s)} \frac{2}{s}.$$

Under förutsättning att slutvärdet existerar så kan slutvärdet av det kvarstående felet, dvs. $\lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$, beräknas med slutvärdessatsen. Slutvärdet existerar på grund av den karakteristiska ekvationen ges av $4s^2 + s + 15 = 0$. Routh-Hurwitz ger direkt att alla poler ligger i strikt vänster halvplan och därmed så existerar slutvärdet.

Slutvärdet blir då

$$\lim_{s\to 0} -2 \frac{G_2(s) G_1(s)}{1 + F(s) G_2(s) G_1(s)} = -2 \frac{G_1(0)}{G_2^{-1}(0) + F(0) G_1(0)} = -2 \frac{3}{0 + 5 \cdot 3} = -\frac{2}{5}$$

b) Samma förutsättningar som i a) uppgiften.

För regulatorstruktur 2 gäller följande. Inför en hjäpvariabel u, som är signalen efter G_1-blocket.

$$U = G_1 (V_1 + K_p(-FY - U))$$

Ur detta kan vi lösa ut U

$$U = \frac{G_1}{1 + G_1 K_p} V_1 - \frac{G_1 K_p F}{1 + G_1 K_p} Y$$

Vi har också att

$$Y = G_2 U$$

Sätt in uttrycket för U i denna ekvation och vi får

$$Y = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 K_p} V_1 - \frac{G_1 G_2 K_p F}{1 + G_1 K_p} Y.$$

Ur detta kan vi lösa ut Y.

$$Y = \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 K_p + G_1 G_2 K_p F} V_1$$

Eftersom vi kan sätta börvärdet r till 0 (på grund av linjäriteten) så ges det kvarstående felet av $-Y$ (detta gäller för båda fallen).

Störsignalen ges av $V_1(s) = 2/s$. Det kvarstående felet ges av

$$-\frac{G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) K_p + G_1(s) G_2(s) K_p F(s)} \frac{2}{s}.$$

Under förutsättning att slutvärdet existerar så kan slutvärdet av det kvarstående felet, dvs. $\lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t))$, beräknas med slutvärdessatsen. Slutvärdet blir då

$$\lim_{s\to 0} -2 \frac{G_1(s) G_2(s)}{1 + G_1(s) K_p + G_1(s) G_2(s) K_p F(s)} =$$

$$= -2 \frac{G_1(0)}{G_2^{-1}(0) + G_2^{-1}(0) G_1(0) K_p + G_1(0) K_p F(0)} =$$

$$= -2 \frac{3}{0 + 0 + 5 \cdot 3 K_p} = -\frac{2}{5 K_p}.$$

Dvs. i detta fall så minskar det kvarståendefelet för stegformade störningar v_1 då $K_p > 1$.

Slutvärdet existerar på grund av den karakteristiska ekvationen ges av $4s^2 + (3K_p + 1)s + 15K_p = 0$. Routh-Hurwitz ger direkt att alla poler ligger i strikt vänster halvplan då $K_p > 0$ därmed gäller slutsatsen ovan.

4

a) Överföringsfunktionen $G(s)$ från u till y ges av

$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B =$$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s & -1 \\ 2 & s+1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{-4s+4}{s^2+s+2}$$

Överföringsfunktionen från r till y ges av

$$G_{ry}(s) = \frac{K_r G(s)}{1 + KG(s)}$$

Polerna ges av

$$s^2 + s + 2 + K(-4s + 4) = 0$$

Vilket om vi samlar ihop termerna blir

$$s^2 + (1 - 4K)s + 2 + 4K = 0$$

Vi vill ha en pol i -1, vi har inga önskemål var den andra ska placeras. Vi har alltså att det karakteristiska polynomet ska ges av

$$(s + 1)(s + a).$$

Genom att identifiera koefficienter får vi

$$s^2 + (a + 1)s + a = s^2 + (1 - 4K)s + 2 + 4K.$$

Ur detta får vi att $K = -1/4$, vilket ger att även den andra polen hamnar i -1.

b) Vi vill alltså att $G_{ry}(0) = 1$. $G(0) = 2$, $K = -1/4$. Detta leder till att

$$G_{ry}(0) = \frac{K_r G(0)}{1 + KG(0)} = \frac{2K_r}{1/2} = 4K_r = 1.$$

Vilket alltså ger att $K_r = 1/4$.

5

a) Newtons 2:a lag för roterande system ger

$$J_1\dot{\omega}_1 = T_d(t) - K(\theta_1(t) - \theta_2(t))$$

$$J_2\dot{\omega}_2 = K(\theta_1(t) - \theta_2(t))$$

Tillstånden väljs enligt

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \theta_1(t) - \theta_2(t), \\ x_2(t) &= \omega_1(t), \\ x_3(t) &= \omega_2(t). \end{aligned}$$

Detta innebär att

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= \dot{\theta}_1(t) - \dot{\theta}_2(t) = x_2(t) - x_3(t), \\ \dot{x}_2(t) &= \dot{\omega}_1(t) = \frac{T_d(t)}{J_1} - \frac{K}{J_1}x_1(t), \\ \dot{x}_3(t) &= \dot{\omega}_2(t) = \frac{K}{J_2}x_1(t). \end{aligned}$$

Vi får alltså följande matriser.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -\frac{K}{J_1} & 0 & 0 \\ \frac{K}{J_2} & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{J_1} \\ 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Polerna ges av egenvärdena till A-matrisen. Egenvärdena till A-matrisen ges av $s(s^2 + K(1/J_1 + 1/J_2))$. Vi ser direkt att det finns en pol i origo vilket innebär att det finns integralverkan i processen. Därför kommer inte heller utsignalen att gå mot 0 då T_d går mot 0, vilket också är helt naturligt eftersom det inte finns någon friktion i systemet.

6

Fyrkantsvågen ges av

$$f(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \pi \\ -1 & -\pi \le t < 0 \end{cases}$$

$$f(t) = f(t + 2\pi)$$

Perioden T är därför 2π. För att bestämma Fourierserieutvecklingen av f är det alltså tillräckligt att bestämma Fourierkoefficienterna. Koefficienterna a_n ges av

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\cdot\cos(nt)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\cos(nt)\ dt \\ &= 0 \qquad \text{för alla postiva heltal } n. \end{aligned}$$

Detta innebär alltså att det inte kommer att finnas några cosinus-termer i Fourierserieutvecklingen av f.

Koefficienterna b_n ges av

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} -1\cdot\sin(nt)\ dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} 1\cdot\sin(nt)\ dt \\ &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{-\cos(nt)}{n}\right]_{0}^{\pi} \\ &= \frac{2}{n\pi}(1-\cos(n\pi)). \end{aligned}$$

Notera speciellt att $\cos(n\pi) = 1$ för alla jämna heltal n, samt -1 för alla udda heltal n, vi får därför

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{för udda } n \\ 0 & \text{för jämna } n. \end{cases}$$

Fourierserieutvecklingen av funktionen f är alltså

$$f(t) \;=\; \frac{4}{\pi}\left(\sin(t) + \frac{\sin(3t)}{3} + \frac{\sin(5t)}{5} + \ldots\right)$$

$\sin nt$ har perioden $\frac{2\pi}{n}$ och därmed frekvensen $\frac{n}{2\pi}$. Den lägre frekvensen på 40Hz, motsvars av $n \approx 251.33$ och den högre på 60Hz av $n \approx 376.99$. Eftersom alla frekvenser som inte ligger i intervallet 40–60Hz släcks ut så blir utsignalen från filtret

$$\frac{4}{\pi}\left(\sum_{n=126}^{187} \frac{\sin(2n+1)}{2n+1}\right).$$