

Reglerteknik M3

Tentamen 2006-08-23

Tid: 08:30 – 12:30

Lokal: V-huset

Kurskod: ERE031

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timmar efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara tydligt motiverade.

Lösningförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Tentamenresultat* anslås senast den 6 september kl 12.30 på avdelningens anslagstavla. *Granskning* av rättning sker den 6 och 7 september kl 12.30 – 13.00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator.

Inga anteckningar är tillåtna!

Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola



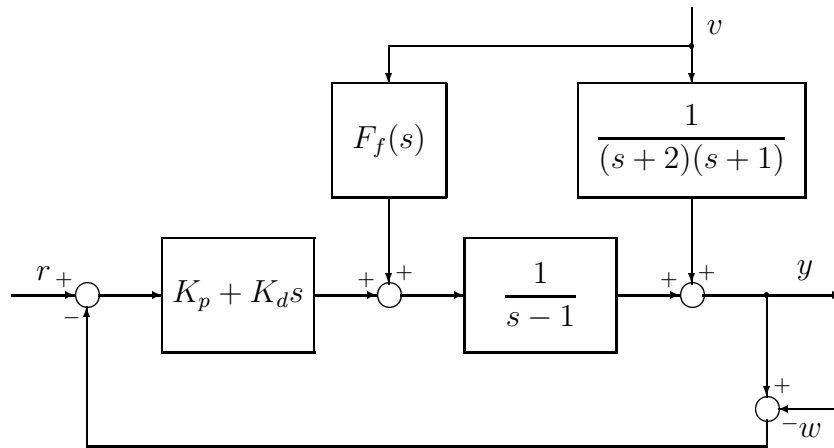
1

Svara på nedanstående frågor - dina svar ska vara motiverade.

- a) Ge ett exempel på ett återkopplat system där kretsöverföringen är stabil men det återkopplade systemet är instabilt. (1p)
- b) Ge ett exempel på ett återkopplat system där kretsöverföringen är instabil men det återkopplade systemet är stabilt. (1p)
- c) Motivera om följande påstående är korrekt. Nollställena i kretsöverföringen kommer alltid att vara nollställen även för det återkopplade systemet. (1p)
- d) En cosinusformad signal med amplituden A och vinkelfrekvensen ω är insignal till ett linjärt stabilt system med överföringsfunktion $G(s)$. Ange vinkelfrekvens och amplitud på utsignalen. (1p)
- e) Reglerdesign baserad på en linjär approximation av en av naturen olinjär process är en mycket användbar metod men har också begränsningar. Ange en väsentlig begränsning och motivera varför du anser den vara väsentlig. (1p)

2

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



- a) Bestäm för vilka K_p och K_d det återkopplade systemet är stabilt. (2p)
- b) Bestäm $F_f(s)$ så att processtörningen v ej påverkar utsignalen y . Antag ideala förhållanden, dvs att verkligheten och modellen stämmer överens. (2p)

3

En dynamisk process som du vill styra beskrivs av följande överföringsfunktion

$$G(s) = 100 \frac{e^{-0.5s}}{(s+2)^2(s+3)}$$

- a) Skissa Bodediagrammet för $G(s)$. (2p)
- b) Designa en PID-regulator med hjälp av Ziegler-Nichols självsvängningsmetod. Ziegler-Nichols självsvängningsmetod gick ut på att vi ställde in en ren P-regulator och sedan ökade förstärkningen i regulatorn tills systemet precis började självsvänga. Den på detta sätt erhållna regulatorförstärkningen kallas K_0 och den erhållna svängningsperioden T_0 . Enligt Ziegler-Nichols tumregler regulatorparametrarna väljas på följande sätt $K_p = 0.6K_0$, $T_i = 0.5T_0$ och $T_d = 0.125T_0$. (2p)
- c) Varför använder vi inte alltid Ziegler-Nichols självsvängningsmetod för regulatordesign? Dvs ange en väsentlig nackdel med denna metod. (2p)

¹En dynamisk process styrs av en P-regulator men reglersystemet svarar inte tillräckligt snabbt på börvärdesändringar. Du blir inhyrd som konsult för att justera regulatorn. Förstärkningen i den befintliga P-regulatorn är ställd till $K_p = 2$ och kretsöverföringen ges av

$$L(s) = \frac{8}{s(s+2)^2}$$

- a) Eftersom du vet att överkorsningsfrekvensen är kopplad till det återkopplade systemets snabbhet så bestämmer du dig för att designa en regulator som kan ge en högre överkorsningsfrekvens samtidigt med goda stabilitetsmarginaler. Du bestämmer dig därför för en pröva med en PD-regulator,

$$F_{PD}(s) = K_p + K_d s.$$

Designa en PD-regulator som ger dubbelt så hög överkorsningsfrekvens som för det ursprungliga systemet samtidigt som systemet har minst har 40° fasmarginal.

(3p)

- b) Skulle det vara möjligt att uppfylla samma krav som i a) med en PI-regulator? Motivera ditt svar!

(1p)

- c) PD-regulatorn i a)-uppgiften är en idealiserad PD-regulator som inte kan användas i praktiken. Istället implementeras ofta

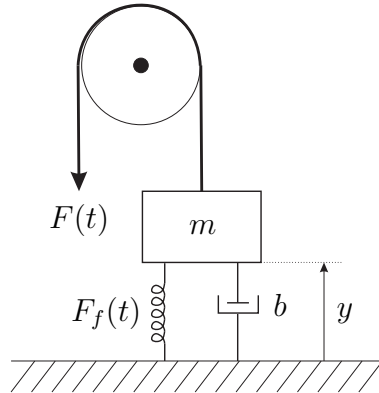
$$F(s) = K_p + \frac{K_d s}{1 + T_f s}.$$

Varför implementeras denna regulator och inte den i a)-uppgiften?

(1p)

¹Denna fråga har här omformulerats något jämfört med den som gavs vid det ursprungliga tentamenstillfället.

Betrakta det mekaniska systemet nedan.



Ett oelastiskt rep löper runt en trissa som kan antas vara helt friktionsfri. Repet är i ena änden kopplat till en massa. Massans koppling till fast mark kan modelleras med hjälp av en dämpare och en fjäder. Dämparen är proportionellt beroende mot hastigheten. I detta fall har vi en fjäder som beter sig lite annorlunda mot vad vi är vana vid då fjäderkraften ges av

$$F_f = k\sqrt{l - l_0},$$

där l_0 betecknar längden av den avspända fjädern. Massans position är $y = l_0$ när fjädern är avspänd.

- a) Ställ upp en tillståndsmodell för processen. $F(t)$ är insignal och $y(t)$ utsignal.

(2p)

- b) Kraften F varierar med små avvikelser kring en stationär arbetspunkt F_0 , dvs. $F(t) = F_0 + \Delta F(t)$. Beräkna massans läge y_0 i arbetspunkten.

(1p)

- c) Linjärisera tillståndsmodellen för små avvikelser kring arbetspunkten (F_0, y_0) .

(3p)

En PI-regulator kan skrivas på följande form

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

En regulator implementeras numera nästa alltid i en dator. Datorn läser med jämna mellanrum av insignalerna och beräknar en ny utsignal. Men för att detta ska fungera så måste en diskret modell tas fram av regulatorn ovan, dvs en en approximativ differensekvation till regulatorn ovan behöver beräknas.

- a) Bestäm en approximativ differensekvation till PI-regulatorn.

(2p)

Fråga b) och c) är av generell natur och har inget med exemplet ovan att göra.

- b) Datorn har fysiska begränsningar på hur ofta den kan läsa in insignalerna och beräkna nu utsignaler. Ett problem som kan uppstå på grund av datorns begränsade kapacitet är den så kallade aliaseffekten. Förklara med ett exempel aliaseffekten.

(1p)

- c) Finns det någon begränsning som gör att vi av reglertekniska skäl inte vill läsa av insignalerna och beräkna nya utsignaler så ofta som möjligt?

(1p)

LYCKA TILL!

Lösningförslag

1

a) $L(s) = \frac{-2}{s+1}$

b) $L(s) = \frac{2}{s-1}$

- c) Skriv kretsöverföringsfunktionen som $\frac{A(s)}{B(s)}$. Nollställena ges lösningen till $A(s) = 0$. Det återkollade systemet beskrivs av $\frac{L(s)}{1+L(s)} = \frac{A(s)}{A(s)+B(s)}$. Dvs nollställena till det återkopplade systemet ges även i detta fall av lösningen till $A(s) = 0$. Notera dock att det i matematisk mening kan finnas gemensamma faktorer i täljar ($A(s)$) och nämnarpolynomet ($A(s) + B(s)$), om så är fallet så kancelleras då ett nollställe i täljaren mot en pol i nämnare.
- d) Vinkelfrekvens på utsignalen är även i detta fall ω . Förstärkingen ges av $|G(j\omega)|$, vilket innebär att amplituden på utsignalen är $A|G(j\omega)|$.
- e) Den linjära approximationen gäller endast för en specifik punkt (arbetspunkten). Då man avlägsnar sig från arbetspunkten blir den linjära approximationen sämre. Detta innebär att linjärisering i normalfallet endast är meningsfull om man kommer att ligga nära en arbetspunkt. Om man har en reglerproblem där man vill kunna reglerera över ett stort område så måste man ta till mer avancerade metoder.

a) Polerna för det återkopplade systemet ges av

$$K_p + K_d s + s - 1 = 0.$$

Dvs

$$(1 + K_d)s + K_p - 1 = 0,$$

vilket innebär att polen ges av

$$s = \frac{1 - K_p}{1 + K_d}.$$

Villkoret för stabilitet blir således. Då $K_p > 1$ så måste $K_d > -1$. Då $K_p < 1$ så måste $K_d < -1$. Då $K_p = 1$ så fås en pol i origo vilket gör att det inte går att få systemet insignal-utsignal stabilt.

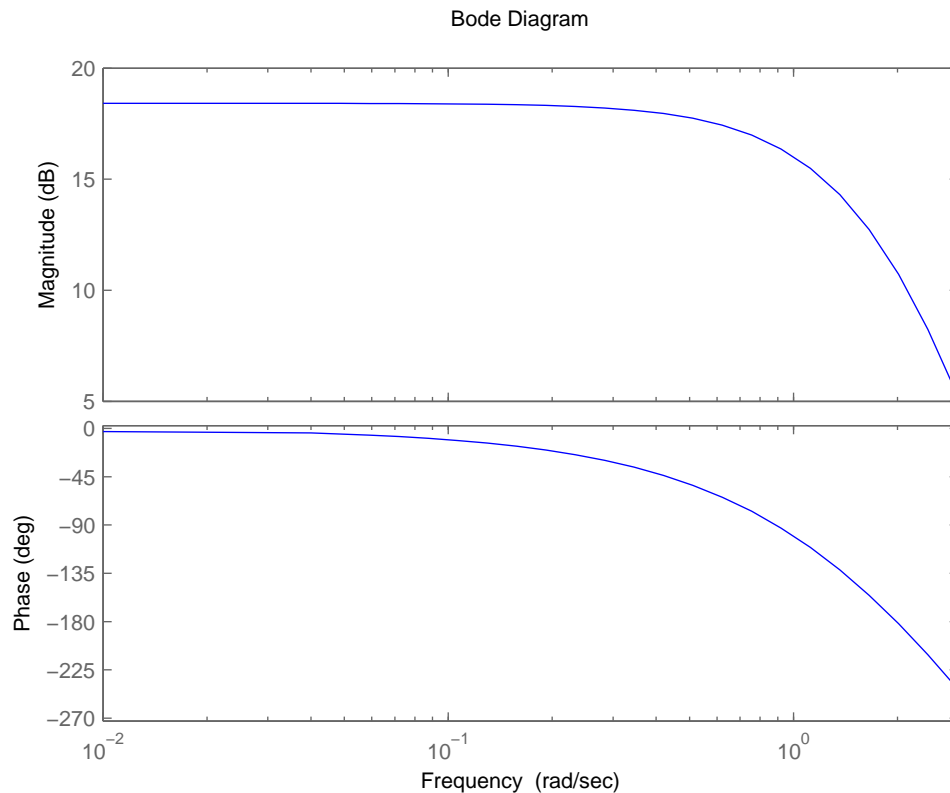
b) Bestäm $G_{vy}(s)$.

$$G_{vy}(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1)} + \frac{F_f(s)}{s-1}.$$

v påverkar ej utsignalen y då $G_{vy}(s) = 0$. Dvs lös ut $F_f(s)$ ur $G_{vy}(s) = 0$. Vilket leder till att

$$F_f(s) = \frac{1-s}{(s+2)(s+1)}.$$

a) Se Bodediagrammet nedan.



b) ω_π kan räknas ut analytiskt alternativt läsas ut ur Bodediagrammet i a) uppgiften.

$$\omega_\pi \approx 1.98.$$

Förstärkningen i processen vid denna frekvens är $10.9\text{dB} \approx 3.5$ - vilket också kan räknas ut analytiskt alternativt läsas av i Bodediagrammet. Detta ger att $K_0 = \frac{1}{3.5} \approx 0.29$, samt att periodtiden på självsvängningen blir $\frac{2\pi}{\omega} \approx 3.17$. Därav följer att parametrarna i PID-regulatoren enligt Ziegler-Nichols väljs till $K_p = 0.6K_0 \approx 0.17$, $T_i = 0.5T_0 \approx 1.59$, $T_d \approx 0.34$. Dvs PID-regulatoren beskrivs av följande överföringsfunktion

$$F(s) = 0.17\left(1 + \frac{1}{1.59s} + 0.34s\right).$$

Kontrollräkningar ger att vi i detta fall får amplitumarginalen 1.95, samt en fasmarginal på 57° .

- c) Fördelen med Ziegler-Nichols är att man inte behöver en matematisk modell för att beräkna parametrarna - istället kan man bestämma K_0 och T_0 genom att utföra självsvängningsexperimentet på den fysiska processen. Att utföra ett självsvängningsexperiment på en fysisk anläggning kan dock vara både svårt och olämpligt eftersom man driver anläggningen på gränsen till instabilitet. En helt annan nackdel med Ziegler-Nichols är att den inte medför några garanterade stabilitetsmarginaler eller prestanda.

- a) Bestäm överkorsningsfrekvensen för $L(s)$ med den gamla regulatorn. Detta kan göras genom att skissa Bodediagrammet för L alternativt genom att beräkna för vilken frekvens $|L(j\omega)| = 1$.

$$|L(j\omega)| = \frac{8}{\omega(\omega^2 + 2^2)}$$

Vilket leder till ω_c numeriskt kan lösas ut ur

$$\omega_c^3 + 4\omega_c - 8 = 0 \Rightarrow \omega_c \approx 1.36.$$

$L(s) = F(s)G(s)$, $F(s) = 2$, leder till att $G(s) = \frac{4}{s(s+2)^2}$.

Vi skulle designa en PD-regulator som har en överkorsningsfrekvens på 2.73 rad/s samt en fasmarginal på minst 40° .

Fasvridningen för G ges av

$$\arg G(j\omega) = -90^\circ - 2 \arctan \frac{\omega}{2}.$$

Vilket innebär att

$$\arg G(j2.73) \approx -198^\circ.$$

Detta ger oss att regulatorn måste lyfta fasen minst 58° vid den nya överkorsningsfrekvens för att vi ska få önskad överkorsningsfrekvens. Med en PD-regulator klarar vi således att uppfylla båda kraven eftersom vi kan höja fasen med upp till 90° .

Fasvridningen för PD-regulatorn ges av

$$\arg F(j\omega) = \arctan\left(\frac{K_d\omega}{K_p}\right)$$

och eftersom den önskade fasvridningen vid den nya överkorsningsfrekvensen ska vara 58° så får vi följande ekvation

$$\arctan\left(\frac{2.73K_d}{K_p}\right) = 58^\circ$$

Detta leder till att

$$\frac{2.73K_d}{K_p} \approx 1.6$$

vilket innebär att

$$K_d \approx 4.51K_p$$

Vi har också kravet att förstärkning för kretsöverföringen ska vara 1 vid den nya överkorsningsfrekvensen.

Förstärkningen för processen vid denna frekvens ges av

$$|G(2.73j)| \approx \frac{4}{2.73(2.73^2 + 2^2)} \approx 0.13$$

Förstärkningen i PD-regulatorn vid den nya överkorsningsfrekvensen ska därför vara

$$\frac{1}{|G(2.73j)|} \approx 7.82.$$

Förstärkningen för PD-regulatorn ges av

$$|F(j\omega)| = \sqrt{K_p^2 + (K_d\omega)^2}$$

$\omega = 2.73$ ger oss följande samband

$$61 = K_p^2 + 7.45K_d^2$$

Om vi nu utnyttjar att kravet vi fick tidigare att $K_d \approx 0.59K_p$ så får vi att

$$K_p \approx 4.1.$$

Vilket ger att $K_d \approx 2.4$.

- b) Med en PI-regulator skulle det inte vara möjligt att överhuvudtaget designa ett stabilt system i detta fall, anledningen är att PI-regulatorn har en negativ fasvridning (mellan 0 och -90°) för alla frekvenser och därför skulle fasvridningen för regulatorn och processen tillsammans vara minst -180° .
- c) Anledningen är att förstärkningen för högfrekventa signaler i den idealiserade PD-regulatorn inte är begränsade, dvs regulatorn skulle behöva ställa ut obegränsat stora styrsignaler för högfrekventa reglerfel - vilket är en praktisk omöjlighet. Genom att lägga på filterkomponenten på D-delen så begränsar man förstärkningen för högfrekventa signaler.

- a) Frilägg massan och ställ upp kraftbalans, notera att trissan inte påverkar något eftersom den antogs vara helt friktionsfri. Newtons 2:a lag på fjäder-massasystemet ger

$$m\ddot{y}(t) = F(t) - mg - k\sqrt{y(t) - l_0} - b\dot{y}(t)$$

Glöm inte bort mg termen, i detta fall så är inte fjädern linjär utan det är viktigt att veta hur mycket den är utsträckt och mg -termen påverkar detta.

Inför tillstånden

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y(t) \\ \dot{y}(t) \end{bmatrix}$$

Detta leder till att

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2(t) \\ \frac{1}{m}[F(t) - mg - k\sqrt{x_1(t) - l_0} - bx_2(t)] \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

där utsignalen, dvs massans position, ges av $x_1(t)$.

- b) Bestäm arbetspunkten. Denna fås då systemet är i vila givet, dvs då tillståndsderivatorna är 0. Eftersom insignalen $F(t) = F_0 + \Delta F(t)$ svänger runt F_0 så kommer arbetspunkten att bero på F_0 och sätter därför $F(t) = F_0$, samt $x_1(t) = x_1^0$, $x_2(t) = x_2^0$ då vi beräknar arbetspunkten.

$$0 = \frac{1}{m}[F_0 - mg - k\sqrt{x_1^0 - l_0} - bx_2^0]$$

$$y_0 = x_1^0 = \left[\frac{1}{k}(F_0 - mg)\right]^2 + l_0$$

- c)

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1, \quad \frac{\partial f_1}{\partial F} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} \Big|_{(x_1^0, x_2^0)} = -\frac{k}{2m\sqrt{y_0 - l_0}} \equiv -K_1, \quad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -\frac{b}{m}, \quad \frac{\partial f_2}{\partial F} = \frac{1}{m}$$

Vilket leder till att den linjära tillståndsmodellen för avvikelser kring arbetspunkten blir

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{x}_1(t) \\ \Delta \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_1 & -\frac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{m} \end{bmatrix} \Delta F(t)$$

$$\Delta y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta x_1(t) \\ \Delta x_2(t) \end{bmatrix}$$

a) PI-regulatorn som ges av

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

kan i tidsplanet skrivas på följande form

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau) d\tau.$$

Genom att deriviera ekvationen får vi

$$\dot{u}(t) = K_p \dot{e}(t) + K_i e(t).$$

Vilket är något lättare att hantera eftersom vi slipper integraltermen. Derivatorna kan enkelt approximeras med följande samband där k anger vilket sampel i ordningen det är och där h anger samplingsintervallet.

$$\dot{u}(t) \approx \frac{u(k) - u(k-1)}{h},$$

samt

$$\dot{e}(t) \approx \frac{e(k) - e(k-1)}{h}.$$

och sätter in dessa approximationer i ekvationen ovan får vi

$$\frac{u(k) - u(k-1)}{h} = K_p \left(\frac{e(k) - e(k-1)}{h} \right) + K_i e(k)$$

vilket efter omskrivning blir

$$u(k) = u(k-1) + (K_p + K_i h) e(k) - K_p e(k-1)$$

- b) Aliaseffekten innebär att en högfrekvent signal efter sampling uppfattas som en långsammare svängning. Exempelvis så kan signalen $\cos(1.8\pi t)$ uppfattas som $\cos(0.2\pi t)$ om man samplar en gång per sekund. I detta fall så kan datorn alltså inte veta om det var en signal med den den lägre eller högre frekvensen som den samplar. Detta ställer förstås till

problem för en regulator eftersom den normalt har olika förstärkning för olika frekvenser. För att man inte ska råka ut för detta så krävs att man filtrera bort högfrekventa signaler före sampling, dvs signaler som innehåller högre frekvenser än halva samlingsfrekvensen (Nyquist-frekvensen).

- c) Om man samplar mycket snabbare än vad processen ändrar sig så blir skillnaden i signalförändring mellan två sampel nära noll och i praktiken blir den 0 eftersom AD-omvandlingen alltid har en begränsad upplösning. Detta får effekten att signalen ser ut att vara konstant ur datorns synvinkel. Problemet blir att högfrekventa störningar - exempelvis mätbrus - blir det som datorn uppfattar och därför blir det som datorn dvs. regulatorn kommer att basera sin styrning på.