Reglerteknik M3

Tentamen 2005-10-20

Tid: 8:30 – 12:30 Lokal: V-huset

Kurskod: ERE031

Lärare: Knut Åkesson, tel 0701-749525
Ansvarig för att svara på frågor: Jessica Fagerlund

Läraren besöker tentamenssalen vid två tillfällen för att svara på eventuella frågor. Detta sker normalt sett en timmer efter tentamensstart samt en timme före tentamens slut.

Tentamen omfattar 6 uppgifter med totalt 30 poäng, där betyg tre fordrar 12 poäng, betyg fyra 18 poäng och betyg fem 24 poäng. Lösningar och svar till alla uppgifter ska vara klart motiverade.

Lösningsförslag till tentamen anslås på kurshemsidan senast första arbetsdagen efter tentamenstillfället. *Tentamenresultat* anslås senast den *3 november* kl 12.30 på avdelningens anslagstavla. *Granskning* av rättning sker den *3 och 4 november* kl 12.30 – 13.00 på avdelningen.

Tillåtna hjälpmedel:

- Reglerteknik M3 - Formelsamling
- Bodediagram
- Beta och Physics handbook, TEFYMA
- Chalmersgodkänd räknare alternativt valfri kalkylator med rensat minne, ej handdator.

Inga anteckningar är tillåtna!

Institutionen för signaler och system
Chalmers tekniska högskola

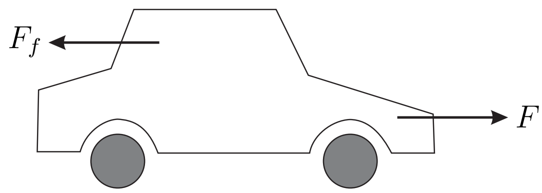
1

För att kunna designa en regulator behövs en modell över processen som ska styras. Nedan finns tre enkla system beskrivna och uppgiften är att bestämma överföringsfunktioner som relaterar de beskriva insignalerna till utsignalerna.

Du kan behöva göra antaganden som inte är redovisade i uppgiften – dessa ska vara rimliga och de ska redovisas.

Uppgiften består totalt av fem deluppgifter.

Process 1



Figur 1: Motorn i bilen ger upphov till en drivande kraft $F(t)$ som i sin tur påverkar bilens hastighet. $F_f(t)$ är en belastande kraft.

a) Betrakta process 1. Bestäm överföringsfunktionen från den drivande kraften F till bilens <u>hastighet</u> då $F_f = 0$.

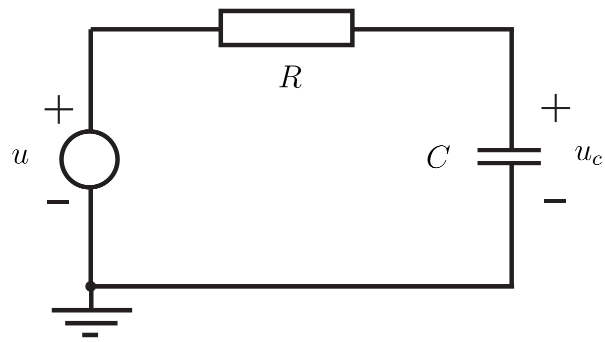
(1p)

b) Betrakta process 1. Bestäm överföringsfunktionen från den drivande kraften F till bilens <u>acceleration</u> då F_f är proportionell mot bilens hastighet.

(1p)

Uppgiften fortsätter på nästa sida!

Process 2

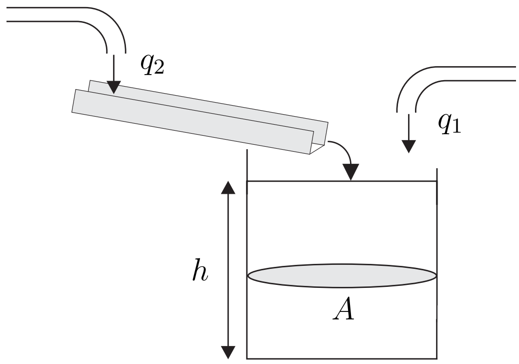


Figur 2: En RC-krets där insignalen är spänningen $u(t)$ och utsignalen spänningen över kondensatorn $u_c(t)$. Resistansen i motståndet är R, kapacitansen i kondensatorn är C.

c) Betrakta process 2. Bestäm överföringsfunktionen från den drivande spänningen u till spänningen över kondensatorn u_c.

(2p)

Process 3



Figur 3: En tank som fylls på från två håll och vi kan för tillfället antaga att inget rinner ut ur tanken. $q_1(t)$ och $q_2(t)$ är de två inflödena. Flödet $q_1(t)$ rinner direkt ner i tanken, medans flödet $q_2(t)$ rinner via en lång ränna, med konstant hastighet, för att först därefter rinna ner i tanken. Tanken är cylinderformat med arean A. Insignaler är $q_1(t)$ och $q_2(t)$ medans utsignalen är höjden $h(t)$ i tanken.

d) Betrakta process 3. Bestäm överföringsfunktionen från inflödet q_1 till höjden i tanken h.

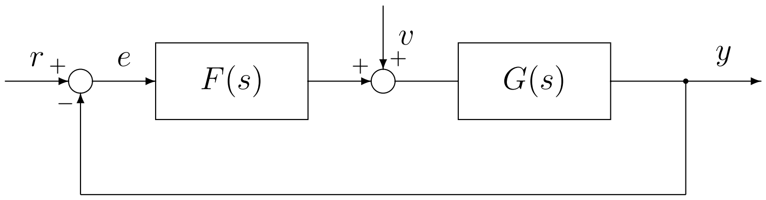
(1p)

e) Betrakta process 3. Bestäm överföringsfunktionen från inflödet q_2 till höjden i tanken h.

(1p)

2

Betrakta det återkopplade systemet nedan.



Låt processen ges av

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}.$$

Specifikationen på det återkopplade systemet kräver att stegformade börvärdesändringar ska kunna följas, dvs

$$\lim_{t \to \infty} (r(t) - y(t)) = 0,$$

då

$$r(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}.$$

Ett förslag är att styra processen med regulatorn

$$F(s) = \frac{s - 1}{s}.$$

a) Bestäm det kvarstående felet då börvärdet är ett enhetssteg. Är specifikationen uppfylld?

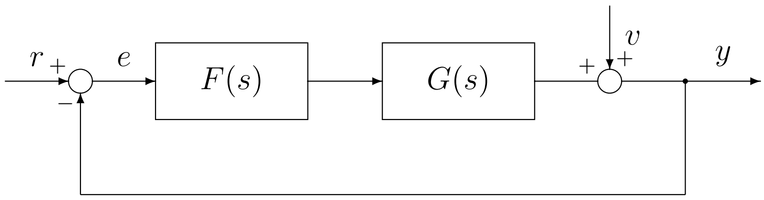
(3p)

b) Vilka problem kan uppkomma med den valda regulatorn?

(2p)

3

Betrakta systemet nedan.



$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$
$$F(s) = K_p$$

a) Skissa bodediagrammet för processen G.

(2p)

b) Bestäm K_p i P-regulatorn ovan enligt Ziegler-Nichols självsvängningsmetod.

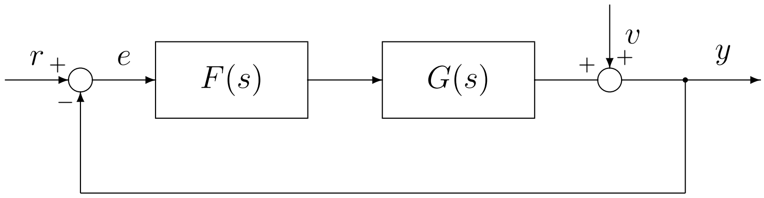
(1p)

c) Vad blir amplitudmarginalen med samma regulator?

(2p)

4

Uppgiften består i att avgöra den "enklaste" regulatortyp som kan användas för att reglera en process så att givna specifikationer är uppfyllda. Det återkopplade systemet beskrivs av blockschemat nedan.



Följande fyra olika regulatortyper finns att välja på.

$$F_P(s) = K_p$$

$$F_{PI}(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

$$F_{PD}(s) = K_p + K_d s$$

$$F_{PID}(s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

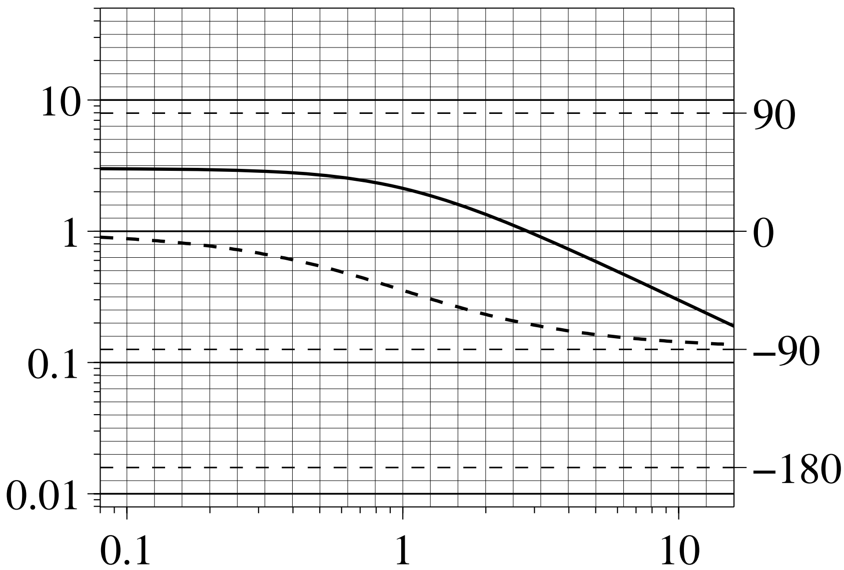
I denna uppgift säger vi att att en P-regulator är enklare än en PI-regulator som är enklare än en PD-regulator som i sin tur är enklare än en PID-regulator, dvs P $<$ PI $<$ PD $<$ PID.

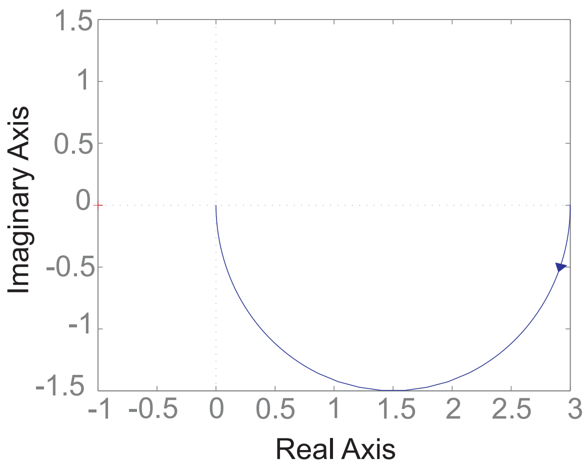
Uppgiften består av tre deluppgifter. Till varje deluppgift presenteras en process G som ska styras. För varje process finns bodediagrammet och nyquistdiagrammet representerat. I bodediagrammet ges fasvridningen av den streckade linjen och förstärkningen av den sammanhängande linjen.

Uppgiften består i att avgöra vilken den enklaste av de fyra regulatortyperna ovan som kan användas för att reglera processen så att de givna specifikationerna är uppfyllda. Det finns inga andra specifikationer än de som är uttryckligen angivna.

Ni behöver inte designa någon regulator men ni ska klart och utförligt motivera varför just den regulatortyp ni föreslår är den enklaste – enligt definitionen ovan – som kan uppfylla den givna den givna specifikationen.

Uppgiften fortsätter på nästa sida!





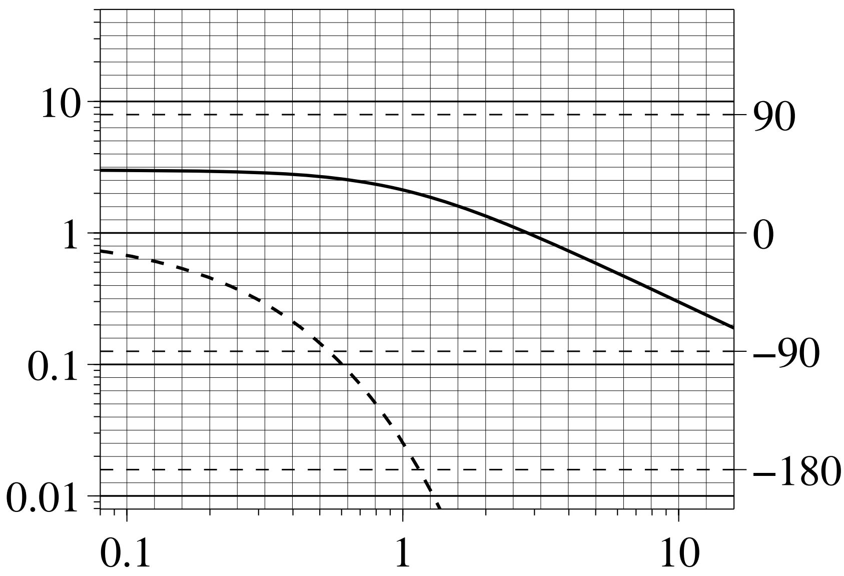
a) För processen beskriven av bode- och nyquistdiagrammen ovan, vilken av de fyra givna regulatortyperna är den enklaste som kan uppfylla följande specifikationer?

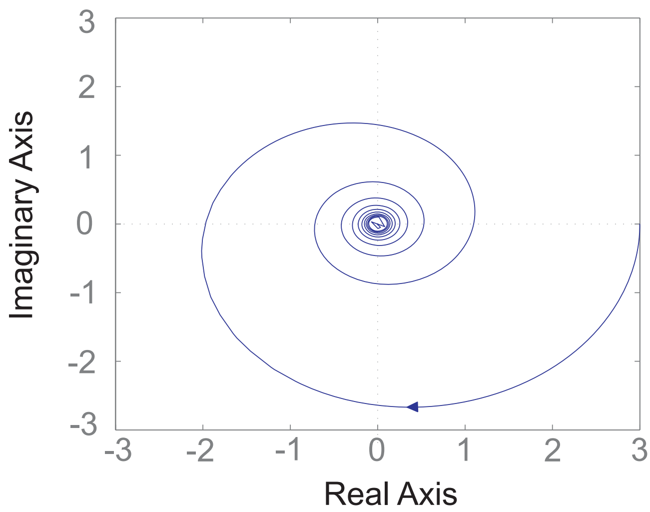
   – Det återkopplade systemet ska kunna ha en godtycklig snabb stigtid.

   – Det återkopplade systemet ska ha en fasmarginal på minst 45°.

(2p)

Uppgiften fortsätter på nästa sida!





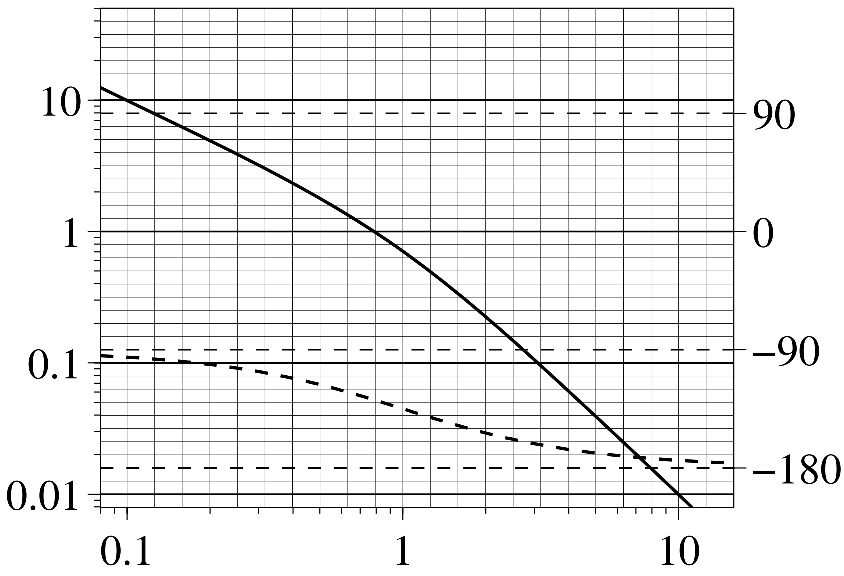
b) För processen beskriven av bode- och nyquistdiagrammen ovan, vilken av de fyra givna regulatortyperna är den enklaste som kan uppfylla följande specifikationer?

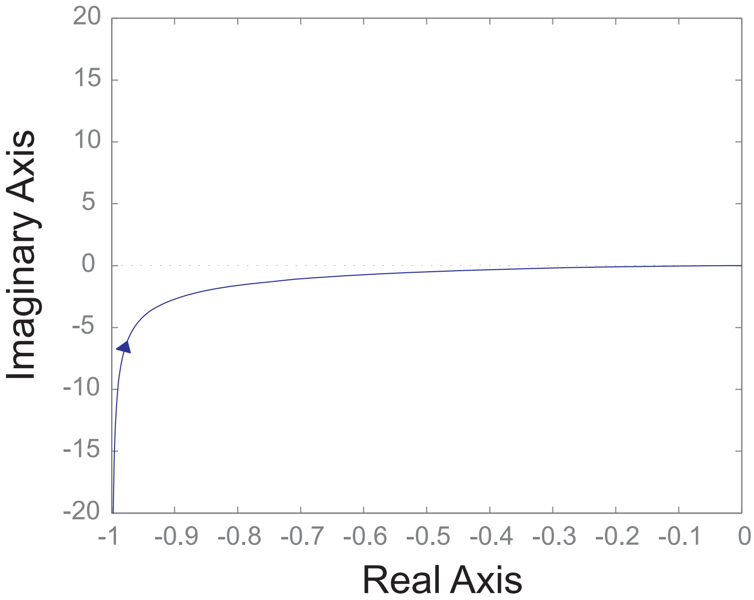
– Det återkopplade systemet ska ha en fasmarginal på minst 60°.

– Stegformade börvärdesändringar ska kunna följas utan kvarstående fel.

(2p)

Uppgiften fortsätter på nästa sida!





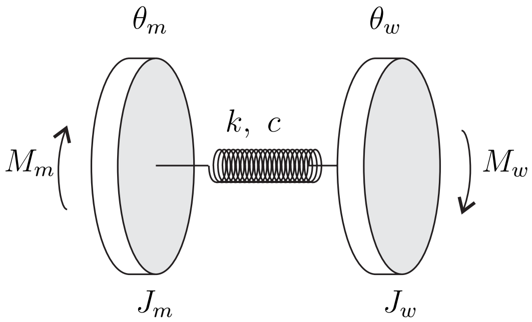
c) För processen beskriven av bode- och nyquistdiagrammen ovan, vilken av de fyra givna regulatortyperna är den enklaste som kan uppfylla följande specifikationer?

- Det återkopplade systemet ska kunna ha en godtycklig snabb stigtid.
- Det återkopplade systemet ska ha en fasmarginal på minst 30°.
- Stegformade börvärdesändringar ska kunna följas utan kvarstående fel.

(2p)

5

En förenklad modell av en drivlina i en bil kan beskrivas av modellen nedan.



Motorn genererar ett drivande moment M_m som överförs till hjulsidan via en elastisk drivaxel med elasticitetskoefficient k och friktion c. θ_m och θ_w är vinkeln på motor respektive hjulsidan. Fordonet påverkas av ett bromsande moment M_w på hjulsidan.

Genom att sätta upp balansekvationerna för drivlinan får vi följande samband

$$J_m\ddot{\theta}_m(t) = M_m(t) - k(\theta_m(t) - \theta_w(t)) - c(\dot{\theta}_m(t) - \dot{\theta}_w(t))$$
$$J_w\ddot{\theta}_w(t) = k(\theta_m(t) - \theta_w(t)) + c(\dot{\theta}_m(t) - \dot{\theta}_w(t)) - M_w(t)$$

a) Välj tillstånd och ställ upp en tillståndsmodell för drivlinan. Insignaler är M_m och M_w, utsignal är hastigheten på hjulet $\dot{\theta}_w$.

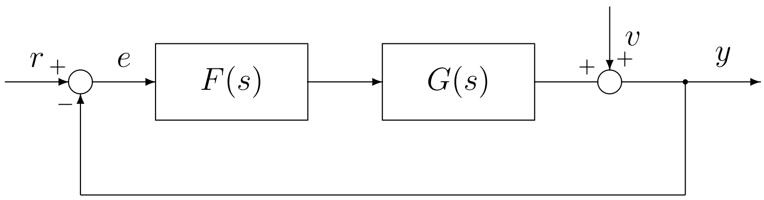
(3p)

b) Bestäm överföringsfunktionen från motormoment M_m till hjulvarvtalet $\dot{\theta}_w$.

(2p)

6

Betrakta ett återkopplat system enligt nedan.



$$G(s) = \frac{1}{s+a}, \; a < 0$$

och

$$F(s) = K_p.$$

Vi antar att K_p är vald på så sätt att det återkopplade systemet är asymptotiskt stabilt.

Låt $r(t)$ vara ett enhetssteg som läggs på vid $t = 0$.

Ett alternativt sätt att definiera stigtiden t_s (som kan ge ett något annat värde på stigtiden än den vi använt tidigare i kursen) är som det största värdet på T så att $y(t) \leq \frac{t}{T}$ för alla $t > 0$.

Då insignalen är ett enhetssteg så kan storleken på den maximala överslängen definieras som

$$M = \max(y(t) - 1), \; t > 0$$

För detta system kommer stigtiden att ge en undre gräns för storleken på den maximala överslängen vilket medför att för att en liten översläng så måste vi ha ett snabbt system.

Visa att $M \geq -at_s$.

(3p)

LYCKA TILL!

Lösningsförslag

1

a) Låt bilens massa vara m och dess hastighet vara $v(t)$. Newtons andra lag ger

$$m\dot{v}(t) = F(t).$$

Laplacetransformering ger

$$msV(s) = F(s),$$

vilket ger

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms}.$$

b) På samma sätt som i a), fast $F_f(t) = bv(t)$. Newtons andra lag ger

$$m\dot{v}(t) = F(t) - bv(t).$$

Laplacetransformering ger

$$(ms + b)V(s) = F(s).$$

vilket ger

$$\frac{V(s)}{F(s)} = \frac{1}{ms + b}.$$

Accelerationen är tidsderivatan av hastigheten. Dvs $A(s) = sV(s)$, där $A(s)$ är laplacetransformationen av accelerationen, detta leder till att

$$\frac{A(s)}{F(s)} = \frac{s}{ms + b}.$$

c) Spänningen över motståndet ges av $Ri(t)$, spänningen över kondensatorn ges av $\int_0^t i(\tau)d\tau$. Kirchoffs ena lag ger att summan av spänningarna i en sluten krets ska vara 0. Dvs

$$u(t) - Ri(t) - \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = 0$$

För att lösa problemet behöver vi först beräkna strömmen. Laplacetransformering ger

$$U(s) = (R + \frac{1}{sC})I(s)$$

Detta ger att strömmen ges av

$$I(s) = \frac{sC}{RCs+1}U(s)$$

Nu kan vi beräkna spänningen över kondensatorn som

$$U_c(s) = \frac{1}{sC}I(s) = \frac{1}{sC}\frac{sC}{RCs+1}U(s) = \frac{1}{RCs+1}U(s)$$

d) Volymen i tanken är integralen av inflödet. Dvs

$$V(t) = \int_0^t q_1(\tau)d\tau$$

$$V(t) = Ah(t)$$

Vilket leder till att

$$h(t) = \frac{1}{A}V(t) = \frac{1}{A}\int_0^t q_1(\tau)d\tau$$

Laplacetransformering ger

$$H(s) = \frac{1}{As}Q_1(s).$$

e) Som uppgift d) med skillnaden att inflödet i tanken är fördröjd L sekunder, dvs

Volymen i tanken ges av

$$V(t) = \int_0^t q_2(\tau - L)d\tau$$

Laplacetransformering ger

$$H(s) = \frac{e^{-sL}}{As}Q_2(s).$$

2

a)

$$G(s) = \frac{1}{s^2 - 1}$$

$$F(s) = \frac{s-1}{s}$$

$$L(s) = F(s)G(s) = \frac{1}{s(s+1)}$$

$$G_{ry}(s) = \frac{L}{1+L} = \frac{1}{s^2+s+1}$$

$$E(s) = R(s) - Y(s) = (1 - G_{ry}(s))R(s) = \frac{s(s+1)}{s^2+s+1}R(s)$$

$$R(s) = \frac{1}{s}$$

$\lim_{t\to\infty} e(t) = (\text{om slutvärdet existerar}) = \lim_{s\to 0} sE(s) = \lim_{s\to 0} \frac{s(s+1)}{s^2+s+1} = 0.$

Slutvärdet existerar eftersom rötterna till $s^2 + s + 1 = 0$ alla ligger i VHP.

Eftersom det kvarstående felet går mot 0 så klarar regulatorn av att följa stegformade börvärdesändringar.

b) Regulatorn kancellerar en instabil pol i processen - detta är ej att rekommendera eftersom överföringsfunktionen

$$G_{vy}(s) = \frac{G(s)}{1 + F(s)G(s)} = \frac{s}{(s-1)(s^2+s+1)}$$

har en instabil pol. Detta medför att en begränsad störning kan ge upphov till en utsignal som går mot oändligheten.

3

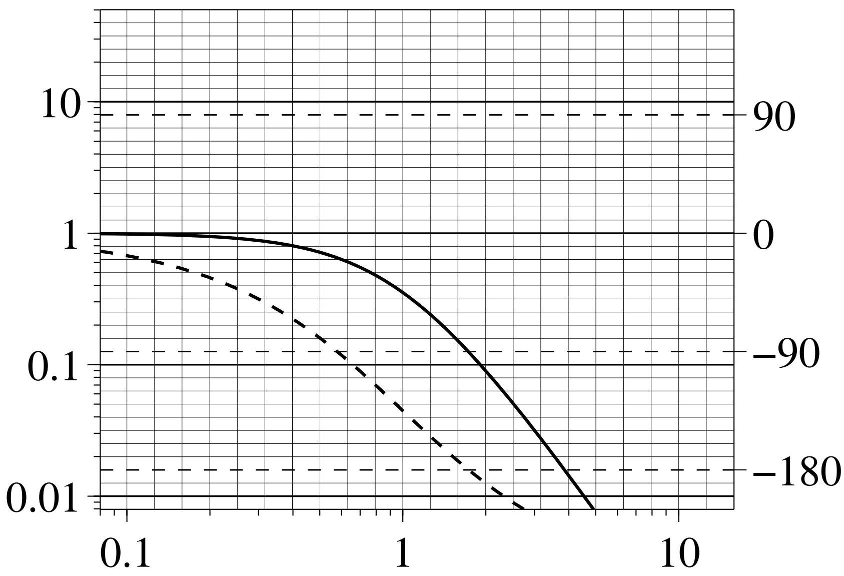
a)

$$G(s) = \frac{1}{(s+1)^3}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{(1+\omega^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\arg G(j\omega) = -3\arctan(\omega)$$

Överföringsfunktionen har trippla brytpunkter i $\omega = 1$.



b) I bodediagrammet ser vi att förstärkningen är ca 1/8 då fasvridningen är 180 grader (vi kan även räkna ut detta analytiskt). Detta medför att $K_0 = 8$, vilket medför att $K_p = 0.5K_0 = 4$.

c) Eftersom Z-N väljer $K_p = 0.5K_0$ så blir amplitudmarginalen för det återkopplade systemet automatiskt 2.

4

a) Första ordningens process utan dödtid. Genom att öka K_p kan vi godtyckligt hög överkorsningsfrekvens och därmed godtyckligt snabb stigtid. För en P-regulator kommer fasmarginalen alltid att vara större än 90 grader. Svar: P-regulator.

b) För att uppfylla kravet på att eliminera kvarstående felet så måste vi ha I-verkan i regulatorn. I-delen kommer att bidra med en extra fasvridning på 90 grader. Kravet på fasmarginalen kan uppfyllas med en PI-regulator genom att välja K_p tillräckligt litet. Svar: PI-regulator.

c) Första ordningens process med integralverkan. Eftersom processen redan innehåller en integralterm så medför inte kravet på att eliminera det kvartående felet några krav på regulatorn. Krav på godtycklig snabb stigtid medför att överkorsningsfrekvensen måste kunna vara godtyckligt hög, dvs K_p måste kunna vara godtyckligt stort. Detta medför att vi inte kan garantera fasmarginalskravet om inte regultorn innehåller positiv fasvridning, dvs D-verkan. Svar: PD-regulator.

5

a) Ett tänkbart val av tillstånd är $x_1(t) = \theta_m(t)$, $x_2(t) = \theta_w(t)$, $x_3(t) = \dot{\theta}_m(t)$, $x_4(t) = \dot{\theta}_w(t)$, detta ger oss en tillståndmodell av ordning fyra. Genom att titta på ekvationerna så ser vi att balansekvationerna enbart beror på skillanden mellan $\theta_m(t)$ och $\theta_w(t)$, därför kan skillanden mellan dessa signaler vara ett bra val av tillstånd. Följande val av tillstånd ger oss en tillståndsmodell som enbart innehåller tre tillstånd:

$$\begin{cases} x_1(t) = \dot{\theta}_m(t) \\ x_2(t) = \dot{\theta}_w(t) \\ x_3(t) = \theta_m(t) - \theta_w(t) \end{cases}$$

Detta ger att

$$\dot{x}_1 = \ddot{\theta}_m = \frac{1}{J_m}(M_m - k(\theta_m - \theta_w) - c(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_w)) = \frac{1}{J_m}(-cx_1 + cx_2 - kx_3 + M_m))$$

$$\dot{x}_2 = \ddot{\theta}_w = \frac{1}{J_w}(k(\theta_m - \theta_w) + c(\dot{\theta}_m - \dot{\theta}_w) - M_w) = \frac{1}{J_w}(cx_1 - cx_2 + kx_3 - M_w))$$

$$\dot{x}_3 = \dot{\theta}_m - \dot{\theta}_w = x_1 - x_2$$

Skrivet på matrisform blir det

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{J_m} & \frac{c}{J_m} & -\frac{k}{J_m} \\ \frac{c}{J_w} & -\frac{c}{J_w} & \frac{k}{J_w} \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{J_m} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{J_w} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_m \\ M_w \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

b) $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$ med A, B, C från a) uppgiften. Alternativt kan vi få fram överföringsfunktionen utan att gå vägen via tillståndsformen. Laplacetransformera balansekvationerna.

$$(J_m s^2 + cs + k)\theta_m = M_m + (k + cs)\theta_w$$

$$(J_w s^2 + cs + k)\theta_w = (k + cs)\theta_m - M_w$$

Den sökta överföringsfunktionen är

$$\frac{s\theta_w}{M_m},$$

för att få fram den så sätter vi M_w till 0 i balansekvationen ovan.

Lös ut θ_m ur första balansekvationen och sätt in i andra balansekvationen.

$$(J_w s^2 + cs + k)\theta_w = (k + cs)\frac{M_m + (k + cs)\theta_w}{J_m s^2 + cs + k}$$

Nu kan vi lösa ut θ_w.

$$\frac{\theta_w}{M_m} = \frac{k + cs}{s^2(J_m J_w s^2 + (J_m + J_w)(cs + k))}$$

vilket leder till att

$$\frac{s\theta_w}{M_m} = \frac{k + cs}{s(J_m J_w s^2 + (J_m + J_w)(cs + k))}$$

6

$$G_{ry}(s) = \frac{FG}{1+FG} = \frac{\frac{K_p}{a+K_p}}{1+s\frac{1}{a+K_p}}$$

Då $r(t)$ är ett enhetssteg så blir

$$y(t) = \frac{K_p}{a+K_p}(1 - e^{-(a+K_p)t})$$

Vi kan då direkt beräkna M, vilket blir

$$M = \frac{K_p}{a+K_p} - 1 = -\frac{a}{a+K_p}$$

Det återstår nu att beräkna det största T så att $y(t) \leq \frac{t}{T}$. t/T motsvarar en rät linje där lutningen beror på värdet på T, då $y(t)$ har det givna utseendet så ser vi att största värdet på T begränsas av hur $y(t)$ ser ut för små t. Lutningen på $y(t)$ för små t ges av $\dot{y}(0)$, där

$$\dot{y}(0) = K_p$$

Dvs det största värdet på T så att $y(t) \leq \frac{t}{T}$ medför att $t_s = \frac{1}{K_p}$. Detta medför direkt att $M \geq -at_s$ eftersom $a < 0$.