Svar till tentamen i EMI190 Elektriska kretsar och signaler del B 981218

1.

a) Fel. Snabbare sampling innebär bara att man kan representera högre frekvenser. Frekvensupplösningen bestäms av signalens längd.

b) Riktigt.

c) Riktigt. I ett filter med olinjär fas kommer olika frekvenser att få olika tidsfördröjningar, vilket leder till en distorsion av signalen.

d) Fel. För att utsignalen skall vara entydigt bestämd måste man även ange konvergensområdet.

e) Fel. Linearitet och tidsinvarians har inget med vartannat att göra.

2. Vi använder att $Y(s) = H(s)X(s)$, dvs att vi kan få ut överföringsfunktionen som $H(s) = Y_1(s)/X_1(s)$. Från tabeller får vi att $X_1(s) = \mathcal{L}(x_1(t)) = \frac{1}{s+3}$, $Y_1(s) = \mathcal{L}(y_1(t)) = \frac{-4}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} = \frac{-(s+5)}{(s+1)^2}$. Således får vi överföringsfunktionen som $H(s) = Y_1(s)/X_1(s) = \frac{-(s+5)(s+3)}{(s+1)^2}$. Vi har att $Y_2(s) = H(s)X_2(s)$. Från tabell får vi att $X_1(s) = \mathcal{L}(x_1(t)) = \frac{1}{s+5}$. Vi får $Y_2(s) = H(s)X_2(s) = \frac{-(s+3)}{(s+1)^2}$. Partialbråksuppdelning av $Y_2(s)$ ger att $Y_2(s) = \frac{-1}{s+1} - \frac{2}{(s+1)^2}$. Genom att använda tabell får vi den kausala utsignalen som $y_2(t) = -(1+2t)e^{-t}u(t)$.

3. a) Om signalen $x[n]$ är periodisk med period T så kommer spektrum av signalen visa sig som spikar där avståndet mellan spikarna är lika med grundfrekvensen $\omega_0 = 2\pi/T$. Vi ser att spektrum består av spikar som är separerade 6 sampel ifrån varandra. Observera att vi inte har nån spik på $2\pi 0/T$ (dc) eller på $2\pi/T$ (grundfrekvensen), dvs dessa fourierseriekoeffecienter är noll för dessa frekvenser. Men så länge avståndet mellan de spikar som existerar är multipler av grundfrekvensen så tyder detta på att signalen är periodisk. I vårt fall är det sex sampel mellan varje frekvenstopp. Vi har 100 sampel från fft:n, dvs vår frekvensupplösning är $2\pi/100$. Således är grundfrekvensen ω_0 (avståndet mellan spikarna i normerad frekvens) lika med $\frac{6}{100}2\pi$. Vi får ut periodtiden som $T = 2\pi/\omega_0 = 100/6 = 50/3$ sampel..

b) Vi har samplat DTFT:n i hundra punkter dvs frekvensupplösningen blir $2\pi/100$

4. a) Vi ser att funktionen har en periodtid på $T = \pi/2$. Inom första perioden beskrivs funktionen som $sin(2t)$. Vi beskriver $x(t)$ som en fourierserie.

$$\begin{aligned} x(t) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{jk\omega_0 t}, \omega_0 = 2\pi/T \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} sin(2t)e^{-jk\omega_0 t}dt \end{aligned}$$

Integralen ger $a_k = \frac{2}{\pi(1-4k^2)}$. Om vi beräknar fouriertransformen får vi $X(j\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - 2\pi k/T) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \delta(\omega - 4k)$. Vi ser att filtret kommer att dämpa alla frekvenskomponenter över fem, dvs vi får endast tre spikar kvar, de för k=-1,0,1. Alltså får vi $Y(j\omega)$ som $Y(j\omega) = 2\pi(a_0\delta(\omega) + 0.2e^{-j\omega\pi/10}(a_1\delta(w-4) + a_{-1}\delta(w+4)))$, $a_0 = \frac{2}{\pi}, a_1 = a_{-1} = -\frac{2}{3\pi}$. Inverstransform ger då att $y(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{15\pi}\cos(4(t - \frac{\pi}{10}))$.

b) Genom samplingen kommer vi få spektrum för den diskreta följden $y[n]$ som $X(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X(j(\Omega - \frac{2\pi}{T}k))$, där $T = 1$. Detta betyder att högsta frekvenserna i $y(t)$ kommer att vikas ned eftersom $4 > \pi$. I stället för en spik på 4 hamnar den på $-\pi + (4-\pi) = 4 - 2\pi$ och den spik som skulle legat på -4 hamnar på $\pi - (4 - \pi) = 2\pi - 4$. Vi får alltså $Y(e^{j\Omega}) = 2\pi(\frac{2}{\pi}\delta(\Omega) + \frac{2}{15\pi}e^{-j4\pi/10}\delta(\Omega - (4 - 2\pi)) + \frac{2}{15\pi}e^{j4\pi/10}\delta(\Omega - (2\pi - 4)))$, periodiskt med period 2π.

5.

a) Signalen $z(t) = x(t)\cos(2\pi f_p t)$ kan förenklas till

$$\begin{aligned} z(t) = x(t)\cos(2\pi f_p t) &= [10\cos(2\pi 100t) + 14\cos(2\pi 80t)]\cos(2\pi f_p t) \\ &= 5[\cos(2\pi(100 - f_p)t) + \cos(2\pi(100 + f_p)t)] \\ &\quad + 7[\cos(2\pi(80 - f_p)t) + \cos(2\pi(80 + f_p)t)] \end{aligned}$$

Endast cosinusar med frekvens lägre än 200π kommer att passera filtret. För $0 < f_p < 180$ får vi att

$$y(t) = 5\cos(2\pi(100 - f_p)t) + 7\cos(2\pi(80 - f_p)t)$$

Utsignalen var given som

$$y(t) = 5\cos(2\pi 50t) + 7\cos(2\pi 30t)$$

och genom att identifiera termerna får vi att

$$\begin{aligned} 5\cos(2\pi 50t) &= 5\cos(2\pi(100 - f_p)t) \Rightarrow f_p = 50 \text{ eller } f_p = 150 \\ 7\cos(2\pi 30t) &= 5\cos(2\pi(80 - f_p)t) \Rightarrow f_p = 50 \text{ eller } f_p = 110 \end{aligned}$$

Svaret är således $f_p = 50$ Hz.

b) Systemet är linjärt, vilket visas nedan.

Antag att insignalern $x_1(t)$ och $x_2(t)$ har utsignalerna $y_1(t)$ respektive $y_2(t)$. Då gäller att

$$y_1(t) = h(t) * [x_1(t)\cos(2\pi f_p t)], \qquad y_2(t) = h(t) * [x_2(t)\cos(2\pi f_p t)]$$

Utsignalen till insignalen $x_3(t) = Ax_1(t) + Bx_2(t)$ är

$$\begin{aligned} y_3(t) &= h(t) * [Ax_1(t)\cos(2\pi f_p t) + Bx_2(t)\cos(2\pi f_p t)] \\ &= h(t) * [Ax_1(t)\cos(2\pi f_p t)] + h(t) * [Bx_2(t)\cos(2\pi f_p t)] \\ &= Ah(t) * [x_1(t)\cos(2\pi f_p t)] + Bh(t) * [x_2(t)\cos(2\pi f_p t)] \\ &= Ay_1(t) + By_2(t) \end{aligned}$$

I förenklingarna har vi använt att faltning är en linjär operation.

Superpositionsprincipen är alltså uppfylld och systemet är linjärt.

c) Systemet är inte tidsinvariant.

Det finns många sätt att visa det på. Vi kan t.ex. hitta ett specialfall där en fördröjning av insignalen inte leder till samma fördröjning av utsignalen. Låt t.ex. insignalen vara $x(t) = \cos(2\pi f_p t)$. Utsignalen är

$$y(t) = h(t) * [\cos(2\pi f_p t)\cos(2\pi f_p t)] = \frac{1}{2}h(t) * [1 + \cos(4\pi f_p t)] = \frac{1}{2}$$

Om vi fördröjer signalen med $T = 1/(4f_p)$ blir utsignalen

$$\begin{aligned} y_1(t) &= h(t) * [\cos(2\pi f_p(t - 1/(4f_p))\cos(2\pi f_p t)] \\ &= h(t) * [\cos(2\pi f_p t - \pi/2)\cos(2\pi f_p t)] \\ &= \frac{1}{2}h(t) * [\cos(\pi/2) + \cos(4\pi f_p t - \pi/2)] = 0 \end{aligned}$$

Eftersom $y_1(t) \neq y(t-T)$ är systemet inte tidsinvariant.

Ett elegantare sätt är att använda kunskapen att systemet är linjärt. Om det dessutom är tidsinvariant skall utsignalen till

$$x(t) = 10\cos(2\pi 100 t) + 14\cos(2\pi 80 t)$$

vara

$$\begin{aligned} y(t) =& 10|H(j2\pi 100)|\cos(2\pi 100 t + \arg\{H(j2\pi 100)\}) \\ &+ 14|H(j2\pi 80)|\cos(2\pi 80 t + \arg\{H(j2\pi 80)\}) \end{aligned}$$

där $H(j\omega)$ är överföringsfunktionen. Men enligt texten är utsignalen

$$y(t) = 5\cos(2\pi 50 t) + 7\cos(2\pi 30 t)$$

Alltså kan systemet inte vara linjärt och tidsinvariant och eftersom det är linjärt kan det inte vara tidsinvariant. (Kom ihåg att utsignaler till LTI-system inte kan innehålla frekvenskomponenter som inte finns i insignalen).